APONTAMENTOS

DE

GEOMETRIA

POR

Antonio FERREIRA DE ABREU

OFFICIER D'ACADÉMIE (Governo Francez, 1904)

OFFICIER DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE (Governo Francez, 1909)

DOCENTE DA ESCOLA NORMAL DO DISTRICTO FEDERAL

(2ª Edição, muito augmentada)

Grande Livraria Leite Ribeiro
Ruas Bethencourt da Silva, 15, 17 e 19
(ant. Sto. Antonio)
e 13 de Maio ns. 74 e 76
RIO DE JANEIRO
1921

APONTAMENTOS

DE

GEOMETRIA

POR

Antonio FERREIRA DE ABREU

OFFICIER D'ACADÉMIE (Governo Francez, 1904)

OFFICIER DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE (Governo Francez, 1909)

DOCENTE DA ESCOLA NORMAL DO DISTRICTO FEDERAL

(2ª Edição, muito augmentada)

Grande Livraria Leite Ribeiro
Ruas Bethencourt da Silva, 15, 17 e 19
(ant. Sto. Antonio)
e 13 de Maio ns. 74 e 76
RIO DE JANEIRO
1921

Approvado pela Directoria Geral de Instrucção Publica do Districto Federal (despacho de 24 de Maio de 1920).

Approvado pelo Governo do Estado do Rio de Janeiro (despacho do Secretario Geral do Estado do Rio de Janeiro, de 10 de Julho de 1920).

Approvado pela Congregação da Escola Naval (despacho do Ministro da Marinha, de 15 de Dezembro de 1920).

1ª PARTE

Definições

Chama-se VOLUME toda porção limitada do espaço.

Chama-se ESPAÇO o meio em que se move a terra e todos os outros astros.

O que separa o volume do resto do espaço é uma SUPERFICIE.

Quando duas superficies se encontram, sua parte commum é uma LINHA.

Quando duas linhas se encontram, sua parte commum é um PONTO.

Os volumes, superficies e linhas, chamam-se FIGURAS.

A geometria é a sciencia da extensão: é a sciencia que tem por objecto o estudo das propriedades das figuras, e por fim especial a medida da sua extensão.

Diz-se que duas figuras são IGUAES, quando coincidem em toda sua extensão.

Duas figuras são SEMELHANTES, quando têm a mesma fórma, sem terem as mesmas dimensões.

Por menor que seja um corpo, elle extende-se em todos os sentidos; consideram-se habitualmente tres dimensões: COMPRIMENTO, LARGURA e ALTURA, chamada, ás vezes, ESPESSURA ou PROFUNDIDADE.

O VOLUME é a extensão considerada sob tres dimensões.

A SUPERFICIE é a extensão considerada sob duas dimensões.

A LINHA é uma extensão considerada sob uma só dimensão.

A mais simples das linhas é a LINHA RECTA. (*)

(*) Segundo o Dr. Friedrich Reidt, professor do Gymnasio de « Hamm », a linha recta não póde ser definida. Da idéa de « direcção » segue-se a de linha recta.

cuja propriedade é ser a mais curta distancia entre dois quaesquer de seus pontos.

De um ponto a outro, só se póde traçar uma linha recta; duas linhas rectas, tendo dois pontos communs, coincidem em toda sua extensão.

Chama-se LINHA QUEBRADA ou POLYGONAL, a linha formada por varias linhas rectas, e LINHA CURVA, a que não é nem recta nem quebrada.

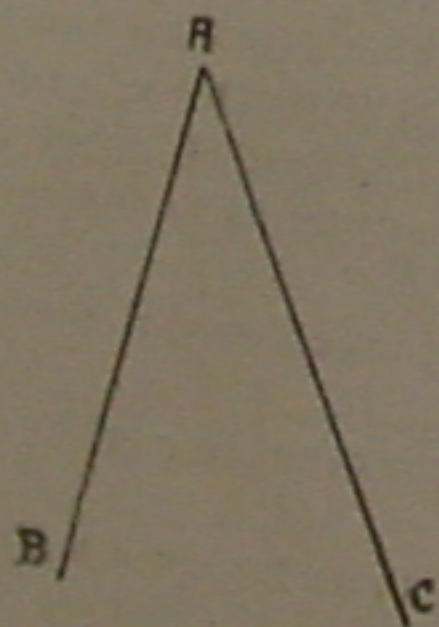
Tambem podemos considerar a linha curva como sendo o limite para o qual tende uma linha polygonal de um numero infinitamente grande de lados infinitamente pequenos.

Chama-se SUPERFICIE PLANA ou PLANO, toda superficie sobre a qual, sendo tomados dois pontos arbitrarios, a linha recta, que une estes dois pontos, se acha inteiramente contida.

Uma superficie POLYEDRICA ou QUEBRADA é uma superficie formada por varios planos differentes.

Uma superficie, que não é nem plana nem polyedrica, é uma SUPERFICIE CURVA.

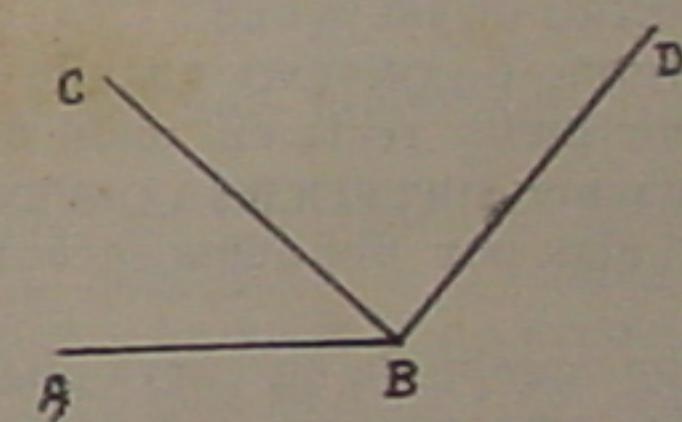
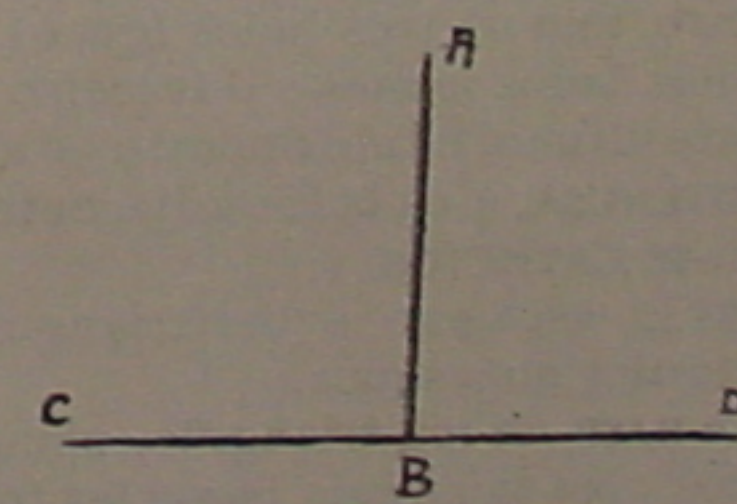
Tambem podemos considerar a superficie curva como sendo o limite de uma superficie polyedrica de um numero infinitamente grande de faces infinitamente pequenas.

Um ANGULO é a figura formada por duas rectas que se encontram. O ponto de encontro se chama VERTICE do angulo; as duas rectas são os LADOS do angulo.

Assim, as duas rectas AB e AC formam um angulo tendo seu vertice em A.

Um angulo se designa pela letra do vertice, ou por tres letras, tendo o cuidado de collocar a letra do vertice no meio. Logo, dir-se-ha o angulo A, ou o angulo BAC.

Esta ultima denominação deve ser necessariamente empregada, se existem dois ou mais angulos tendo seu vertice no mesmo ponto.

O tamanho de um angulo não depende do comprimento dos seus lados, que se deve suppôr prolongados infinitamente, mas sim do seu afastamento.

Quando dois angulos têm um vertice commum e um lado commum intermediario, diz-se que são ADJACENTES; taes são os angulos ABC, CBD.

Uma linha recta AB é PERPENDICULAR sobre uma outra recta CD, quando fórma com esta dois angulos

adjacentes, ABD e ABC, iguaes. Estes angulos chamam-se ANGULOS RECTOS.

Se uma recta fórma com uma outra dois angulos adjacentes desiguaes, diz-se que é OBLIQUA em relação a esta.

Um angulo menor do que um angulo recto é um ANGULO AGUDO; um angulo maior do que um angulo recto é um ANGULO OBTUSO.

Dois angulos são COMPLEMENTARES, quando sua somma vale um recto, e SUPPLEMENTARES, quando sua somma vale dois rectos.

Chamam-se PARALLELAS duas rectas que, situadas no mesmo plano, não se encontram por mais que se as prolongue.

Chamam-se ANGULOS OPPOSTOS PELO VERTICE, dois angulos taes que os lados de um delles estejam no prolongamento dos lados do outro.

A BISSECTRIZ (bis, secare) de um angulo, é a recta que, passando pelo vertice, divide o angulo ao meio.

Uma figura plana, limitada de todos os lados por linhas rectas, é um POLYGONO; o conjuncto dessas linhas é o PERIMETRO do polygono.

Um polygono é CONVEXO quando não póde ser cortado por nenhuma recta em mais de dois pontos. Tambem chamamos SUPERFICIES CONVEXAS ás que não pódem ser cortadas por nenhuma secante em mais de dois pontos.

Uma linha quebrada ou curva que não é plana, isto é, que não tem todos os seus pontos situados no mesmo plano, chama-se LINHA REVERSA.

Um TRIANGULO é um polygono de tres lados. Distingue-se entre os triangulos: o EQUILATERO, o ISOSCELES, o RECTANGULO e o ESCALENO.

O primeiro tem os tres lados iguaes; o segundo tem sómente dois lados iguaes; o terceiro tem um angulo recto: neste ultimo, o lado opposto ao angulo recto, chama-se HYPOTENUSA, e os lados adjacentes ao angulo recto, chamam-se CATHETOS.

O triangulo escaleno é um triangulo qualquer, com lados e angulos quaesquer.

Chama-se BASE de um triangulo, um qualquer dos seus tres lados. No triangulo isosceles toma-se habitualmente por base o lado que não é igual aos dois outros.

Um QUADRILATERO é um polygono de quatro lados. Entre os quadrilateros distinguimos:

o QUADRADO, que tem seus quatro lados iguaes e seus angulos rectos;

o RECTANGULO, que tem seus angulos rectos, sem ter os lados iguaes:

o PARALLELOGRAMMO, cujos lados oppostos são parallelos;

o LOSANGO, que tem seus lados iguaes, sem ter os angulos rectos;

o TRAPEZIO, em que dois lados, sómente, são parallelos.

Chama-se DIAGONAL de um polygono a linha recta que une os vertices de dois angulos deste polygono não adjacentes ao mesmo lado.

AXIOMA é uma verdade evidente por si mesma.

THEOREMA é uma verdade que precisa de uma explicação, de um raciocinio, que chamamos DEMONSTRAÇÃO.

COROLLARIO é uma consequencia de um theorema.

O enunciado de um theorema compõe-se de duas partes:

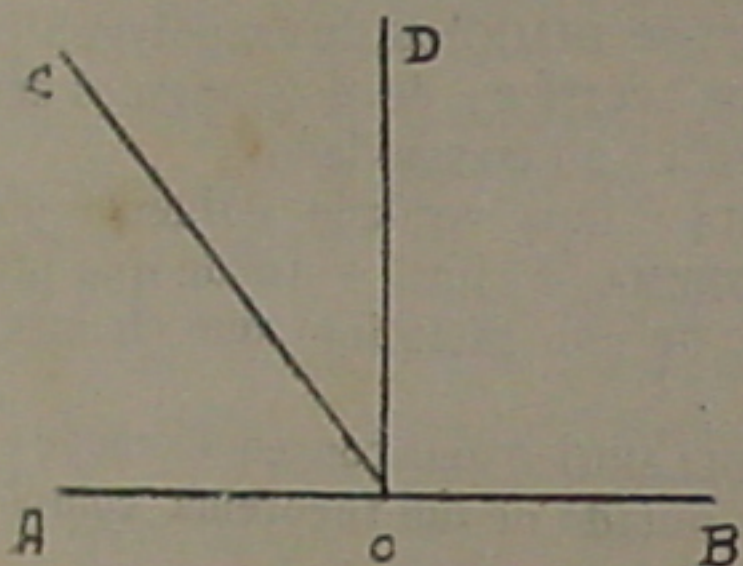
a HYPOTHESE ou supposição, e a CONCLUSÃO ou THESE.

Trocando, no enunciado de um theorema, a hypothese pela conclusão, e a conclusão pela hypothese, forma-se a RECIPROCA do primeiro theorema.

A reciproca nem sempre é verdadeira: por exemplo, todos os angulos rectos são iguaes, mas nem todos os angulos iguaes são rectos.

Designa-se sob o nome commum de PROPOSIÇÕES aos theoremas e tambem aos PROBLEMAS, isto é, ás questões que pretendemos resolver.

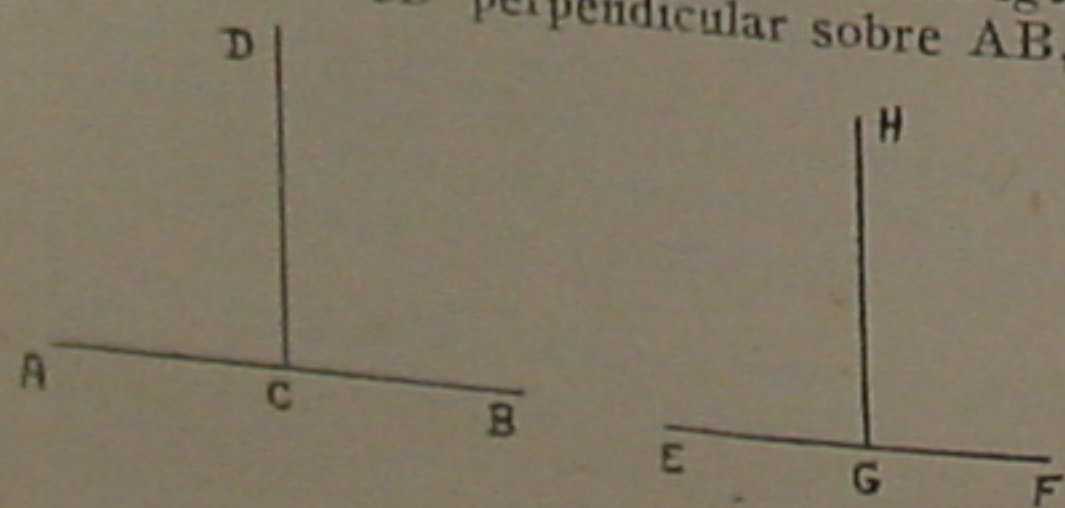
Perpendiculares e Obliquas

Theorema 1. — D'um ponto O tomado sobre uma recta AB, podemos traçar uma perpendicular, e uma só.

Tracemos pelo ponto O uma recta OC qualquer, fazendo com AB dois angulos desiguaes, e seja AOC o menor destes dois angulos.

Se fazemos girar a recta OC em torno do ponto O até que venha applicar-se sobre OB, haverá um momento em que o angulo AOC será maior do que o angulo COB. Logo, haverá uma posição OD da recta, na qual ella fará com AB dois angulos iguaes: OD será, pois, perpendicular sobre AB.

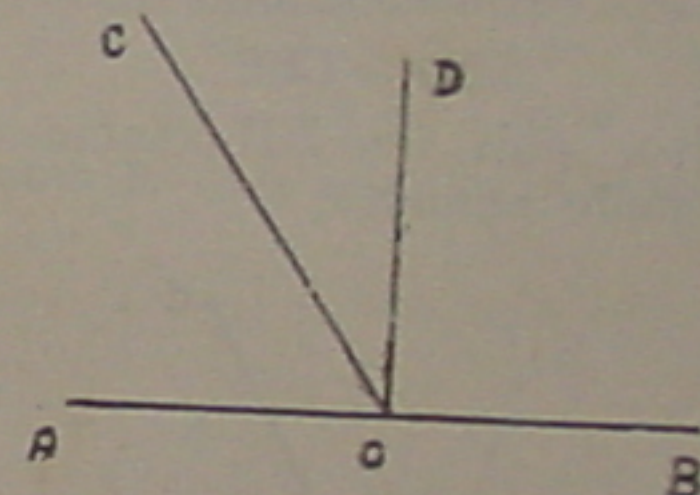
Outrosim, OD é a unica perpendicular que se possa traçar pelo ponto O sobre AB; pois, por pouco que OD incline para um lado ou para o outro, a igualdade dos angulos DOA e DOB desapparece, e OD deixa de ser perpendicular.

Corollario: — Todos os angulos rectos são iguaes.

Sejam a recta CD perpendicular sobre AB, e a

recta GH perpendicular sobre EF: digo que o angulo recto FGH é igual ao angulo recto BCD.

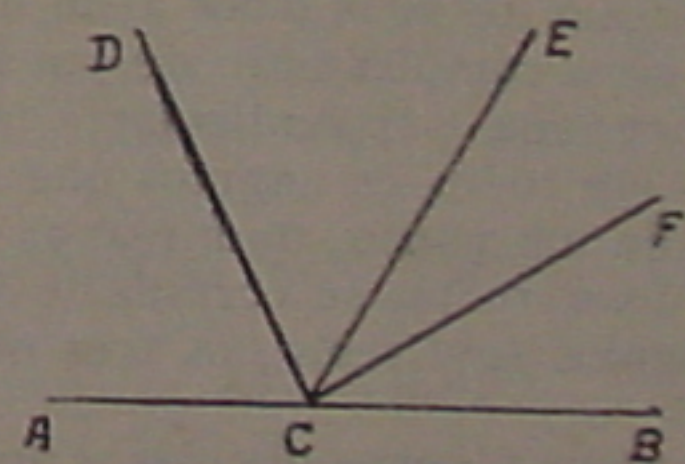
Appliquemos EF sobre AB de tal modo que o ponto G caia em C; como, de um ponto sobre uma recta só se póde traçar uma perpendicular sobre esta recta, GH tomará a direcção CD, e os angulos FGH e BCD coincidirão.

Theorema 2. — Quando uma recta OC encontra uma outra AB, aquella fórma com esta dois angulos adjacentes, COA e COB, supplementares.

Tracemos a perpendicular OD sobre AB. O angulo BOC vale um recto, mais o angulo DOC; logo os

angulos BOC e COA valem juntos um angulo recto mais a somma dos angulos DOC e COA.

Ora, esta ultima somma é igual ao angulo recto DOA: logo, a somma dos angulos BOC e COA é igual a dois rectos.

Corollario: — Quando um dos angulos formados pela recta OC com AB é recto, o outro angulo tambem o é.

Corollario: — A somma dos angulos formados

de um mesmo lado de uma recta AB, por varias rectas traçadas do mesmo ponto C, é igual a dois angulos rectos.

Com effeito, o angulo DCB, somma dos angulos DCE, ECF e FCB, é o supplemento do angulo ACD.

—

Reciprocamente— Quando dois angulos adjacentes ABC e CBD são supplementares, seus lados exteriores estão em linha recta

ABC + CBD = 2 rectos.

Se BD não estivesse no prolongamento de AB, e fosse BE esse prolongamento: teriamos

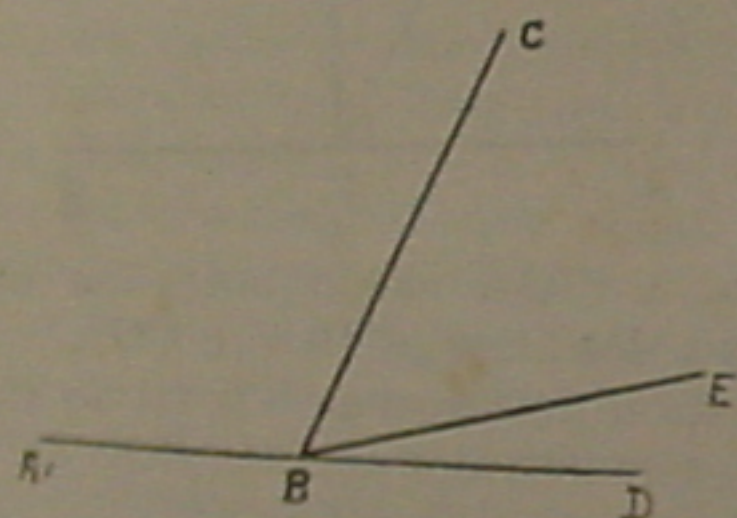
ABC + CBE = 2 rectos.

logo,

ABC + CBD = ABC + CBE

ou, supprimindo o termo commum ABC, fica

CBD = CBE

E' preciso, pois, que BD coincida com BE para que esta igualdade persista.

Ora, BE, por construcção, estando no prolongamento de AB, é claro que o mesmo acontecerá a BD.

—

Para obter-se o supplemento de um angulo dado, basta prolongar um de seus lados além do vertice.

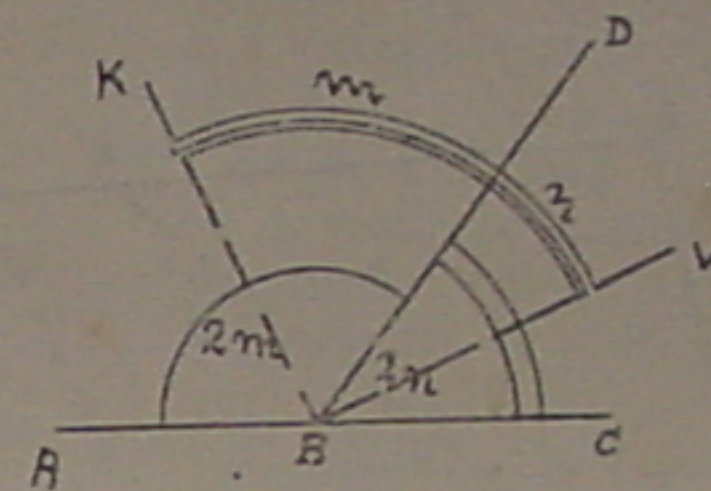
Para ter-se o complemento de um angulo, basta traçar no vertice uma perpendicular a um dos lados.

A somma de todos os angulos que se pódem formar em torno de um ponto, num plano, vale 4 rectos.

Quando duas rectas se cortam de modo que um dos quatro angulos seja recto, os tres outros tambem o são.

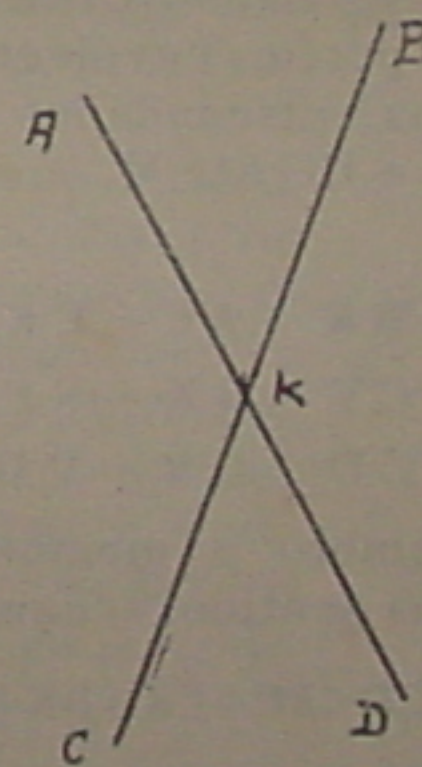
Se uma recta é perpendicular a uma outra, esta tambem é perpendicular áquella.

—

Se dois angulos adjacentes são supplementares, as suas bissectrizes são orthogonaes. (*)

2 m + 2 n = 2 r

m + n = 1 recto

logo, KBV = 1 recto.

Theorema 3.—Os angulos oppostos pelo vertice são iguaes.

AKB + AKC = 2 rectos

CKD + AKC = 2 rectos

logo,

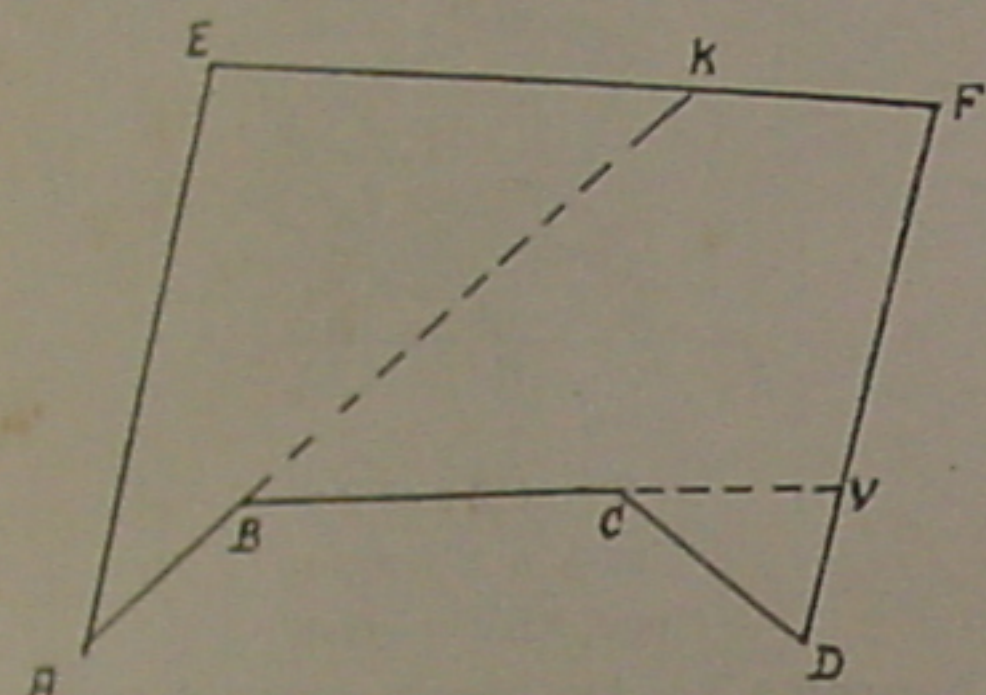
AKB + AKC = CKD + AKC

ou

AKB = CKD

—

(*) Duas rectas são orthogonaes quando uma é perpendicular á outra.

Theorema 4. — Uma linha polygonal convexa é maior do que toda linha envolvente que tenha as mesmas extremidades do que a primeira.

Seja a linha polygonal ABCD, e uma outra, AEFD, tambem polygonal, porém, envolvendo a primeira.

Sejam A e D as extremidades communs. Prolonguemos AB até K, e BC até V.

Temos

$$AB + BK < AE + EK$$
$$BC + CV < BK + KF + FV$$
$$CD < CV + VD$$

Sommando membro a membro estas tres desigualdades de mesmo sentido, achamos :

$$AB + BK + BC + CV + CD < AE + EK + BK + KF + FV + CV + VD$$

eliminando as partes communs BK e CV, vem :

$$AB + BC + CD < AE + EK + KF + FV + VD$$

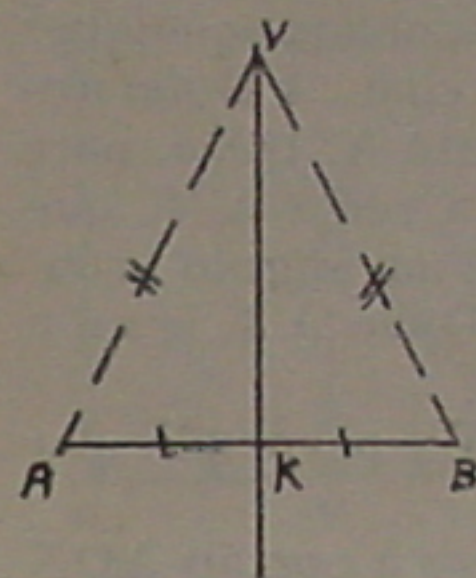
ou

$$AB + BC + CD < AE + EF + FD$$

—

Logar geometrico é um conjuncto de pontos que gozam de uma certa propriedade, á exclusão de todos os outros pontos.

—

Theorema 5. — A perpendicular, traçada pelo meio de uma recta limitada, é o logar geometrico dos pontos do plano que distam igualmente das extremidades da recta considerada.

Seja AB uma recta limitada, K o meio de AB, e KV a perpendicular em K. Unindo o ponto V ao ponto A e ao ponto B, digo que $VA = VB$.

Considerando a parte VKB da figura, fazendo-n'a girar em torno de VK como eixo, os angulos em K sendo iguaes, KB tomará a direcção KA, e, como por hypothese $KB = KA$, o ponto B cahirá em A: logo, VB coincidirá com VA.

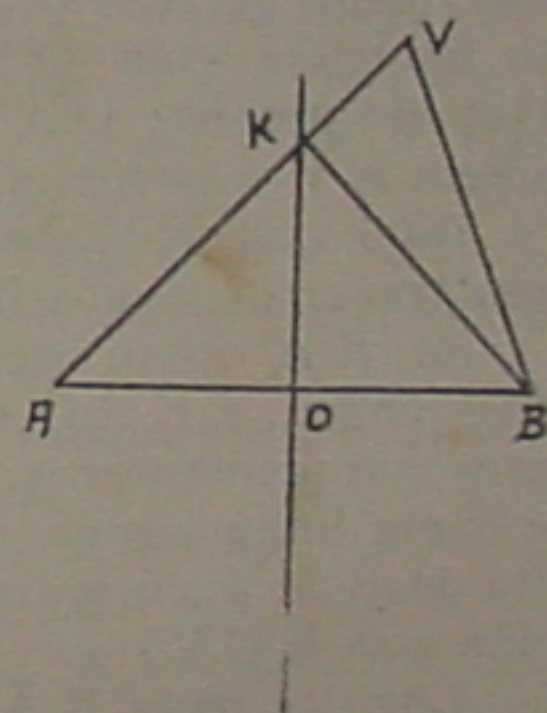
Se tomassemos o ponto V fóra da perpendicular, as distancias VB e VA seriam desiguaes.

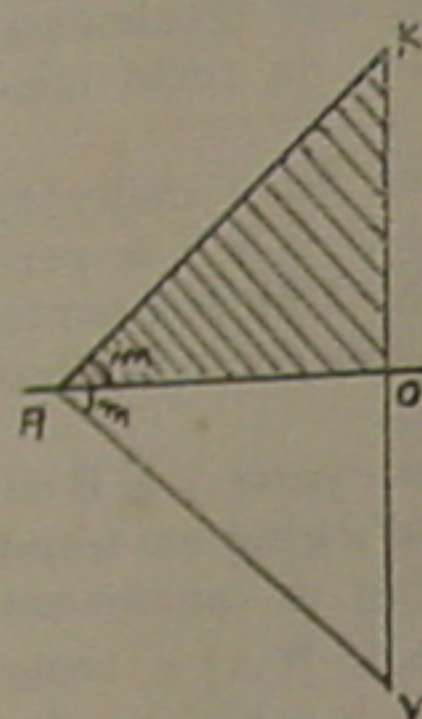
O ponto V estando fóra da perpendicular, uma das suas distancias ás extremidades A e B, cortará a perpendicular. No caso da figura é VA que corta a perpendicular. Já demonstramos que o ponto K situado sobre a perpendicular distava igualmente de A e de B. Logo,

$$KA = KB$$

Mas,

$$VB < VK + KB$$
$$VB < VK + KA$$
$$VB < VA$$

—

Theorema 6. — D'um ponto tomado fóra de uma

recta podemos traçar uma perpendicular sobre esta recta, e uma só.

Seja um ponto K fóra da recta A B. Traço uma obliqua qualquer K A, fazendo com A B um angulo m; do ponto A, traço, para baixo de A B, a recta A V, que fórme com A B um angulo igual ao angulo m. Tomo A V igual a A K; uno K V.

Digo que K V é perpendicular sobre A B.

Fazendo girar a porção AOK da figura, em torno de A B como eixo, os angulos em A sendo iguaes, A K tomará a direcção A V, e como A K = A V, o ponto K cahirá em V. Como nessa giração o ponto O estava no eixo, O K veio coincidir com O V. Logo os angulos K O A e V O A são iguaes: O A é perpendicular sobre K V, e tambem K V é perpendicular sobre A B.

Digo que K V é a unica perpendicular que se possa traçar do ponto K sobre A B.

Se K A fosse perpendicular, os angulos em m seriam rectos, e K A O e O A V seriam angulos adjacentes supplementares, teriam, pois, seus lados exteriores em linha recta. Ora, já traçamos K V, linha recta de K a V; é indispensavel, pois, que K A V coincida com K O V.

Logo, a recta K A, que suppomos fosse tambem perpendicular sobre A B, coincide com K O.

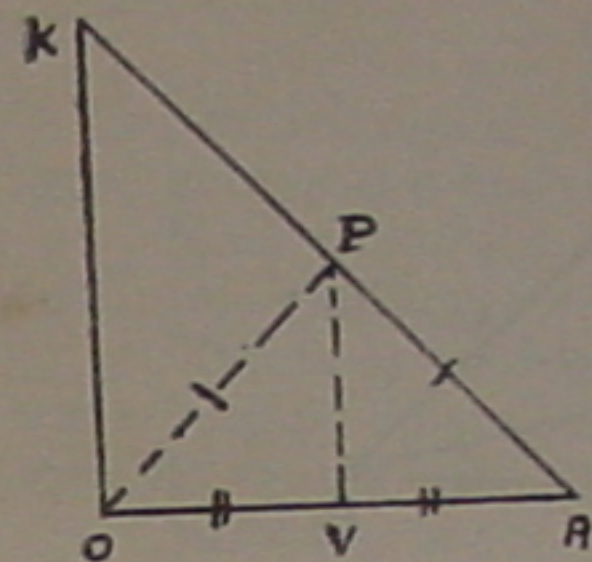
Logo, ha só uma perpendicular.

Theorema 7. — D'um ponto tomado fóra de uma recta, traçando um perpendicular e varias obliquas:

1°) A perpendicular é menor do que qualquer obliqua;

2°) Duas obliquas que se afastam igualmente do pé da perpendicular, são iguaes;

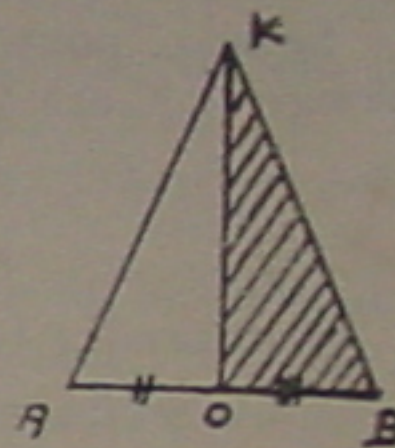
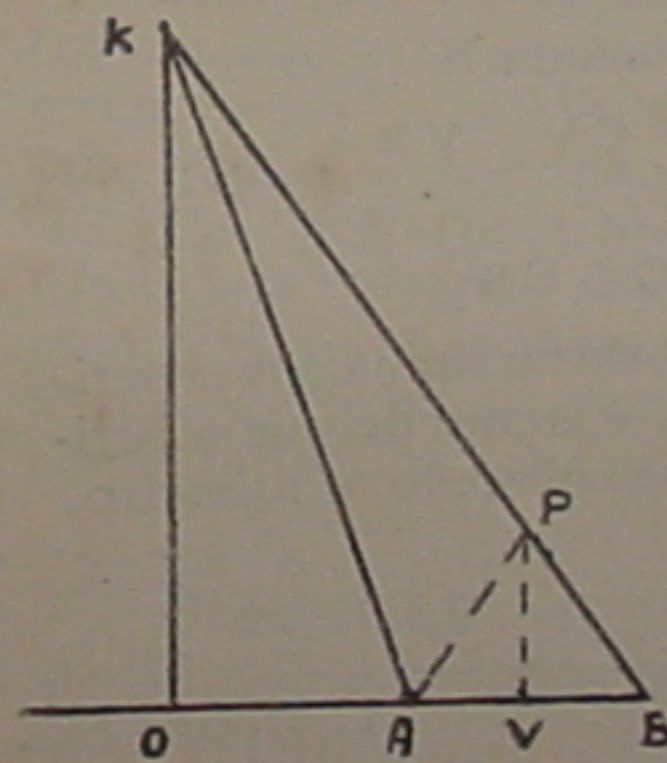
3°) De duas obliquas que se afastam desigualmente do pé da perpendicular, a que se afasta mais, é a maior.

1°) Seja K O a perpendicular e K A a obliqua. Vou demonstrar que K O é menor do que K A. Tomo o meio de O A; deste meio, V, traço a perpendicular V P; já sabemos que

$$PA = PO$$

mas $KO < KP + PO$

ou $KO < KP + PA$

ou $KO < KA$

2°) Sejam K A e K B duas obliquas taes que O A = O B. Já sabemos que K A = K B, pois, o ponto K pertence á perpendicular no meio de A B.

3°) Sejam K A e K B duas obliquas que se afastam desigualmente do pé da perpendicular.

Tomemos o meio V, de A B; deste ponto tracemos V P.

Já sabemos que PA = PB.

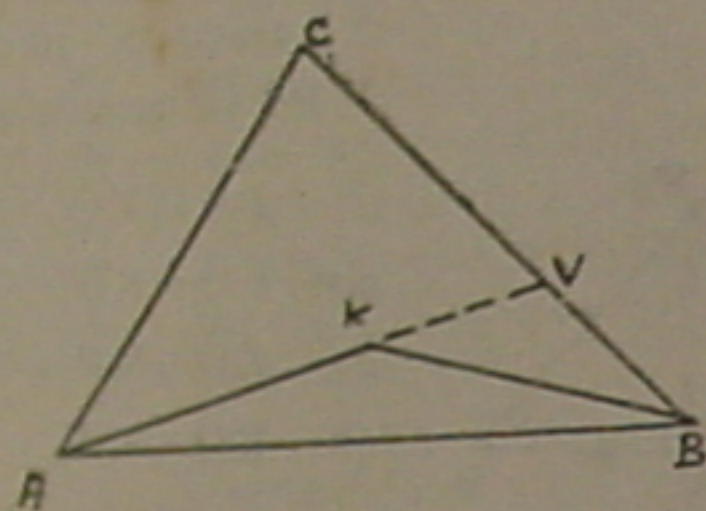
Ora,

$$KA < KP + PA$$
$$KA < KP + PB$$
$$KA < KB$$

As obliquas iguaes formam angulos iguaes com a perpendicular.

A mais curta linha que se possa traçar de um ponto a uma recta, é a perpendicular a esta recta. D'um ponto a uma recta só se pódem traçar duas obliquas iguaes.

Theorema 8. — A somma das distancias d'um ponto K, tomado no interior d'um triangulo, ás ex-

tremidades d'um lado A B, é menor do que a somma dos dois outros lados do triangulo.

Seja o ponto K no interior do triangulo A B C: prolongo A K até V.

$$AV < AC + CV$$
$$KB < KV + VB$$

Sommando, temos

$$AV + KB < AC + CV + KV + VB$$
$$AK + KV + KB < AC + CV + KV + VB$$

Supprimindo o termo commum K V, vem:

$$AK + KB < AC + CV + VB$$

ou

$$AK + KB < AC + CB$$

D'um modo analogo, demonstrariamos que o perimetro de um polygono qualquer é menor do que o perimetro d'um outro polygono envolvendo o primeiro.

Triangulos

Um triangulo é uma figura plana limitada por tres rectas; é o mais simples dos polygonos.

Num triangulo devemos considerar seis elementos: tres angulos e tres lados.

Chama-se MEDIANA a recta que une um vertice de um triangulo ao meio do lado opposto. Em todo triangulo ha tres medianas.

ALTURA de um triangulo é a perpendicular traçada de um vertice sobre o lado opposto. (Póde acontecer que a altura caia no prolongamento do lado opposto.) Em todo triangulo ha tres alturas.

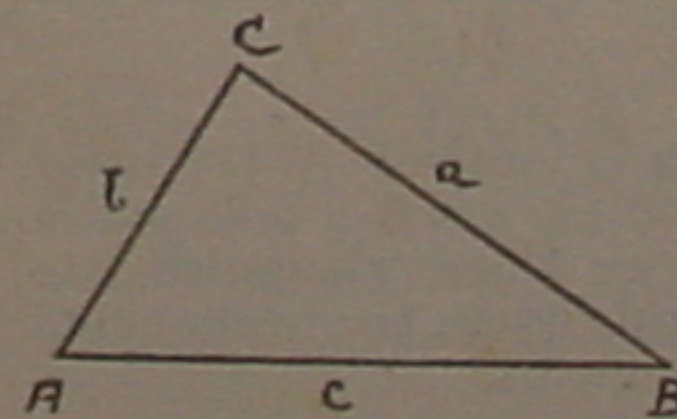
Já vimos o que é BISSECTRIZ. O triangulo, tendo tres angulos, terá tres bissectrizes.

Ainda podemos indicar uma linha interessante: é a SYMEDIANA, symetrica da mediana em relação á bissectriz. Depois de havermos estudado a circumferencia daremos a construcção da symediana.

Em todo triangulo ha tres symedianas: ellas se cortam num mesmo ponto, chamado PONTO DE LEMOINE, e representa-se habitualmente pela letra K. Dir-se-ha, pois, ponto de Lemoine, ou ponto K.

As perpendiculares traçadas pelos meios dos lados de um triangulo são as tres MEDIATRIZES do triangulo. Demonstraremos, em momento opportuno, que ellas se cortam num mesmo ponto (o centro do circulo circumscripto ao triangulo).

—

Theorema 9.—Cada lado de um triangulo é menor do que a somma dos dois outros e maior do que a sua differença.

Seja o triangulo ABC. Convencionaremos chamar os lados oppostos aos angulos A, B e C pelas letras minusculas correspondentes: a, b, c.

Vê-se logo na figura

que CB, linha recta, é menor do que a linha quebrada CAB que tem as mesmas extremidades:

$$CB < CA + AB$$

$$a < b + c$$

Subtrahindo b a ambos os membros desta desigualdade, achamos:

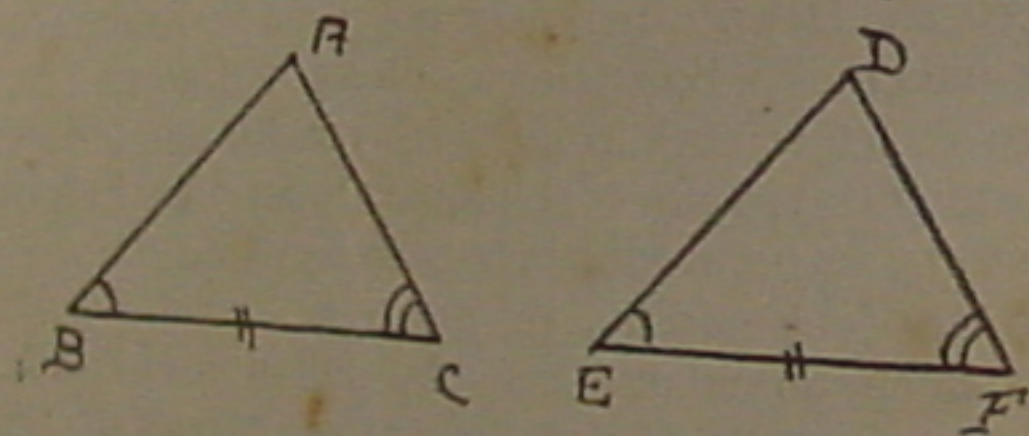
$$a - b < b + c - b$$

ou $$a - b < c$$

ou $$c > a - b$$

—

1º caso d'igualdade. — Dois triangulos são iguaes quando têm um lado igual adjacente a angulos respectivamente iguaes.

Sejam os dois triangulos ABC e DEF, tendo o lado BC = EF, o angulo B = E e o angulo C = F.

Collocando BC sobre EF de modo que o ponto B caia em E e o ponto C em F, os angulos B e E sendo iguaes, BA e ED tomarão a mesma direcção, e o ponto A cahirá em qualquer parte da recta ED. O angulo C sendo igual ao angulo F, CA tomará a direcção de FD; o ponto A deve, pois, cahir ao mesmo tempo nas direcções ED e FD; logo, é claro, que A coincidirá com D. Os dois triangulos, coincidindo em toda sua extensão, são iguaes.

—

2º caso d'igualdade. — Dois triangulos são iguaes quando têm um angulo igual, comprehendido entre lados respectivamente iguaes.

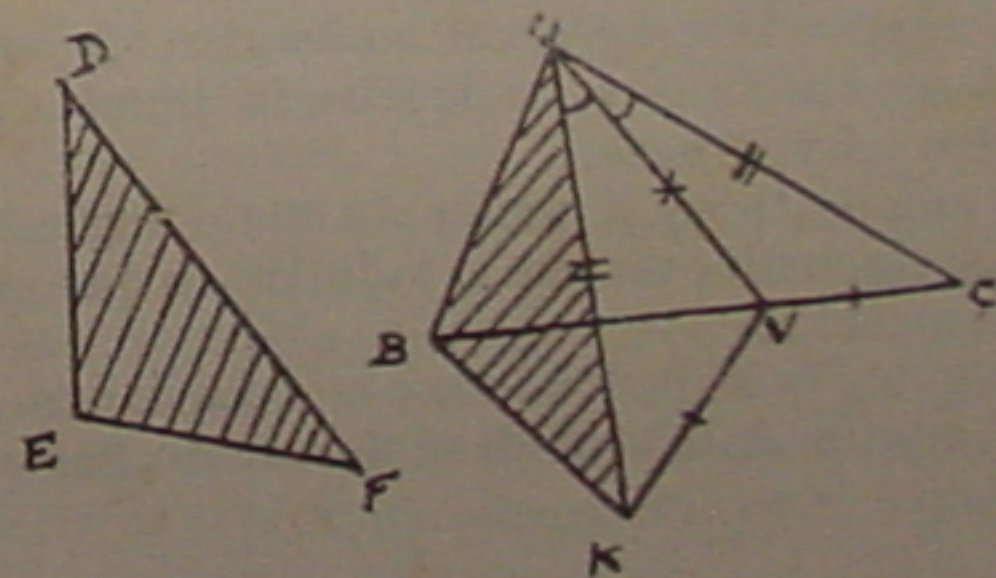
Sejam os dois triangulos ABC e DEF taes que o angulo B = E, e os lados AB = DE, e BC = EF.

Collocando BC sobre EF de modo que B caia em E, e o ponto C em F; o angulo B sendo igual ao angulo E, o lado BA tomará a direcção ED; como BA = ED (por hypothese), o ponto A cahirá em D; logo AC coincide com DF, e os triangulos, coincidindo em toda sua extensão, são iguaes.

—

Theorema 10. — Se dois triangulos têm dois lados respectivamente iguaes, porém o angulo comprehendido entre os dois lados do primeiro menor do que o angulo comprehendido entre os dois lados do segundo, o terceiro lado do primeiro será menor do que o terceiro lado do segundo.

Sejam os dois triangulos DEF e ABC, taes que DE = AB, DF = AC e o angulo D < angulo A. Queremos demonstrar que EF < BC.

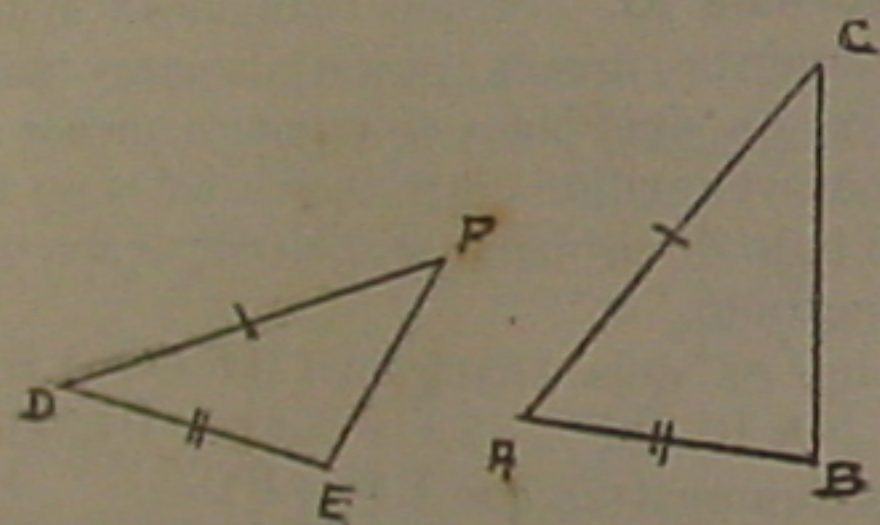
Tracemos AK, formando com AB um angulo igual ao angulo D, tomemos AK = DF, logo tambem

igual a AC. Unindo o ponto B ao ponto K, os dois triangulos ABK e DEF são iguaes, logo EF = BK.

Ora, queriamos demonstrar que EF era menor do que BC, basta agora demonstrar que BK é menor do que BC.

Tracemos A V, bissectriz do angulo K A C, e unamos K V. Os dois triangulos V A C e V A K são iguaes, logo V C = V K. Mas, no triangulo B V K.

$$BK < BV + VK$$
ou
$$BK < BV + VC$$
ou
$$BK < BC$$
ou
$$EF < BC$$

—

Reciprocamente. — Se dois triangulos têm dois lados respectivamente iguaes, porem o terceiro lado do primeiro menor do que o terceiro lado do segundo, o angulo comprehendido entre os dois primeiros lados do primeiro triangulo será menor do que o angulo comprehendido entre os dois primeiros lados do segundo triangulo.

Sejam os dois triangulos D E F e A B C, taes que D E = A B, D F = A C e E F < B C.

Se o angulo D fosse igual ao angulo A, os dois triangulos seriam iguaes, e E F seria igual a B C, o que é contra a hypothese.

Se o angulo D fosse maior do que o angulo A, o lado E F seria maior do que o lado BC, o que ainda é contra a hypothese.

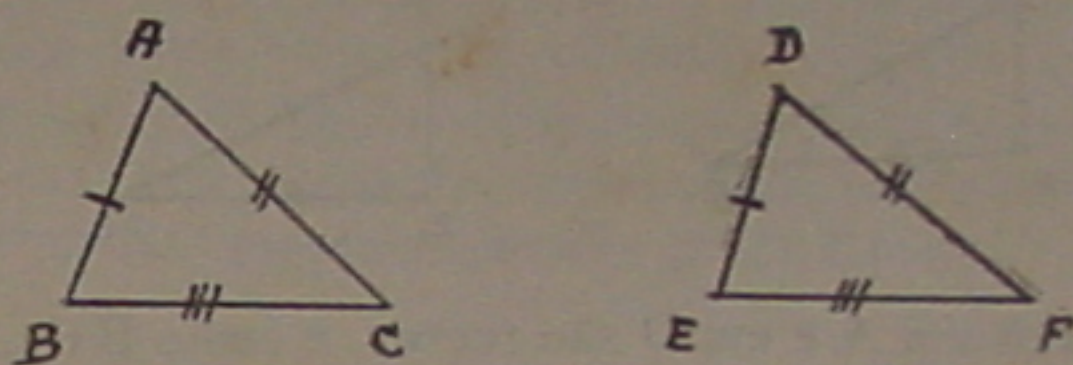
O angulo D não podendo ser nem igual nem maior do que o angulo A, não poderá deixar de ser menor.

—

3° caso d'igualdade. — Dois triangulos são iguaes, quando têm os seus tres lados respectivamente iguaes.

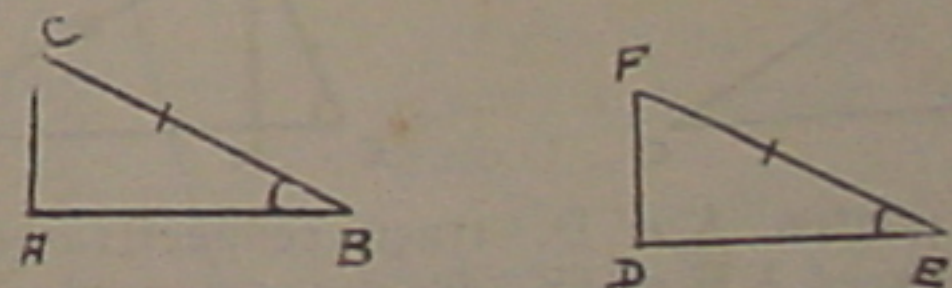
Sejam os dois triangulos A B C e D E F, taes que B A = E D, A C = D F e B C = E F.

Se o angulo A fosse menor do que o angulo D, o

terceiro lado B C do primeiro triangulo seria menor do que o terceiro lado E F do outro, o que é contra a hypothese.

Se o angulo A fosse maior do que o angulo D, o lado B C seria maior do que o lado E F, o que tambem é contra a hypothese.

O angulo A, não podendo ser nem maior nem menor do que o angulo D, lhe será igual. E os dois triangulos terão um angulo igual comprehendido entre lados respectivamente iguaes. Serão, pois, iguaes.

Casos d'igualdade dos triangulos rectangulos.

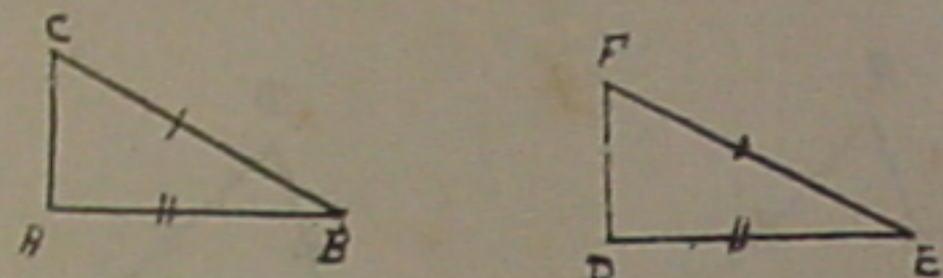
1° — Dois triangulos rectangulos são iguaes quando têm a hypotenusa igual e um angulo agudo igual.

Sejam os dois triangulos rectangulos A B C e D E F, com as hypotenusas B C e E F iguaes e os angulos B e E iguaes.

Collocando F E sobre C B de modo que F caia em C, e E em B; os angulos E e B sendo iguaes, os lados E D e B A tomarão a mesma direcção. Ora, os angulos D e A são rectos, e como os pontos F e C coincidem, as perpendiculares F D e C A tambem coincidirão e D cahirá em A. Os triangulos serão, pois, iguaes.

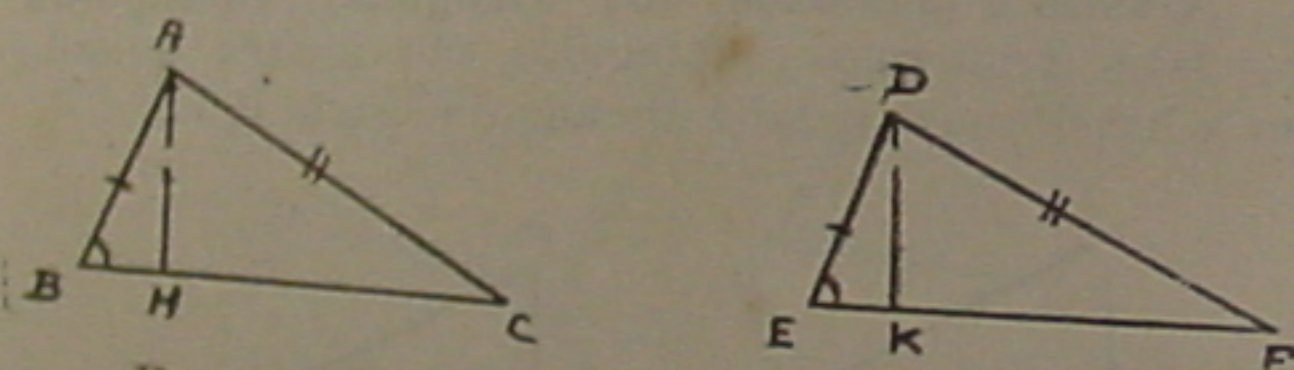
—

2.° — Dois triangulos rectangulos são iguaes quando têm a hypotenusa igual e um catheto igual.

Sejam os dois triangulos A B C e D E F, taes que C B = F E e A B = DE.

Collocando AB sobre DE, de modo que A caia sobre D, e B sobre E, CA tomará a direcção FD, pois

os angulos em A e em D são rectos, e como $BC = EF$, e podem ser consideradas como duas obliquas iguaes se afastando igualmente do pé da perpendicular, os pontos C e F coincidirão, e os triangulos serão iguaes.

4° caso d'igualdade. — Dois triangulss são iguaes quando têm dois lados respectivamente iguaes, e igual o angulo opposto ao maior lado dado.

Sejam os dois triangulos ABC e DEF taes que $AB = DE$, $AC = DF$ e angulo B = angulo E.

Dos pontos A e D, traço respectivamente as perpendiculares AH e DK. Os dois triangulos rectangulos ABH e DEK têm a hypotenusa igual e um angulo agudo igual, logo, estes triangulos são iguaes e

$$AH = DK$$

$$BH = EK \qquad (1)$$

Dahi deduzimos que os dois triangulos rectangulos AHC e DKF tambem são iguaes, pois, têm a hypotenusa igual e os cathetos AH e DK iguaes; logo,

$$HC = KF \qquad (2)$$

Addicionando membro a membro as duas igualdades (1) e (2), achamos

$$BH + HC = EK + KF$$

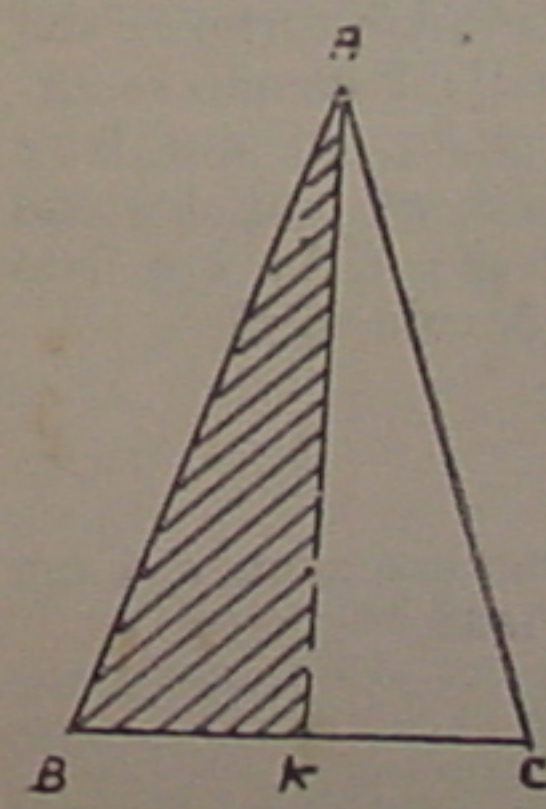
ou $$BC = EF$$

Logo, os dois triangulos ABC e DEF têm os seus tres lados respectivamente iguaes — são iguaes.

Em vez de dar o angulo opposto ao maior lado dado, se tivessemos dado o angulo opposto ao menor dos lados dados, o problema teria sido incerto.

Mais longe, nos occuparemos detalhadamente d'este caso interessante, conhecido sob o nome de CASO INCERTO. (nos problemas, no fim da 2ª parte).

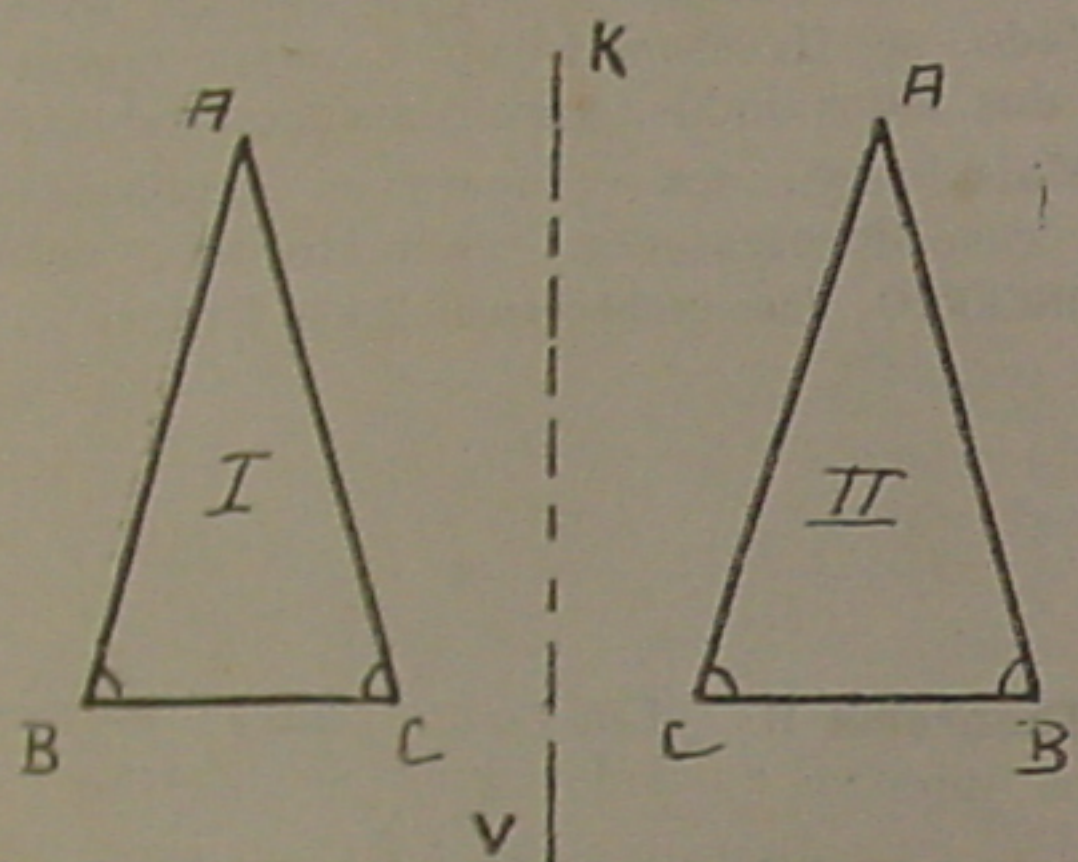
Theorema 11. — Em todo triangulo isoceles, os angulos oppostos aos lados iguaes são iguaes.

Seja o triangulo isoceles ABC, no qual $AB = AC$.

Traçando a perpendicular AK sobre a base, os triangulos rectangulos ABK e ACK têm a hypotenusa igual e um catheto igual, logo elles são iguaes e o angulo B = ao angulo C.

Da igualdade dos triangulos ABK e ACK tambem deduzimos que $BK = KC$, e que os angulos em A são iguaes.

Logo, no triangulo isoceles, a altura é ao mesmo tempo mediana e bissectriz — qualquer recta que goze de uma destas tres propriedades, tambem gozará das duas outras.

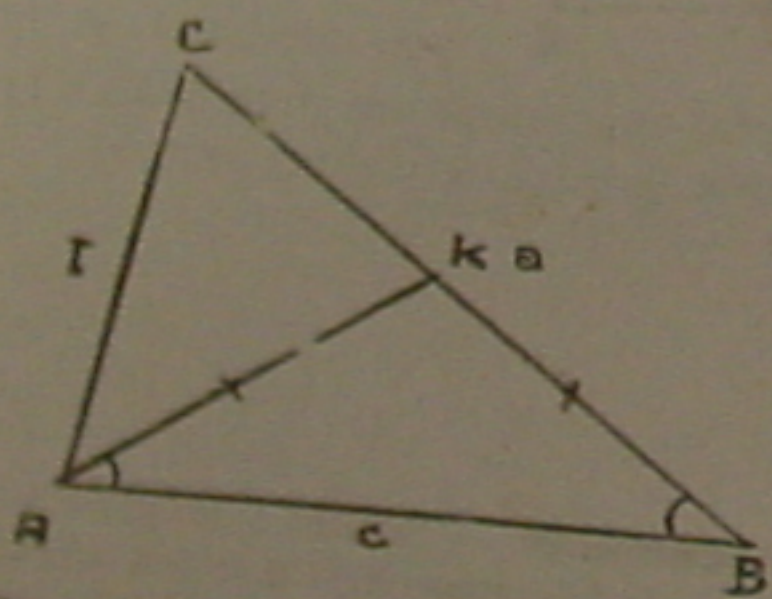
Reciprocamente. — Se um triangulo tem dois angulos iguaes, os lados oppostos a estes angulos iguaes, são iguaes, e o triangulo é isoceles.

Seja o triangulo A B C, em que o angulo B = ao angulo C.

Façamos girar a triangulo dado em torno de um eixo KV, de modo a rebatel-o em II. Fazendo escorregar o triangulo A B C sobre o plano, até que B se colloque em C, e C em B, como esses angulos são iguaes, o lado B A tomará a direcção C A, e o lado C A a direcção B A, e os pontos A coincidirão.

Logo. A B = A C.

—

Theorema 12. — N'um triangulo qualquer, a um maior angulo, oppõe-se um maior lado.

Seja A > B digo que a > b.

Tracemos AK, formando com AB um angulo igual ao angulo B; A K será igual a B K.

Ora.

$$AC < CK + KA$$
$$AC < CK + KB$$
$$AC < CB$$
$$b < a$$
ou $$a > b$$

—

Reciprocamente — Em todo triangulo, ao maior lado oppõe-se o maior angulo (figura precedente).

Seja a > b digo que A > B. Com effeito, se A = B, o triangulo seria isoceles e o lado a = b, o que é contra a hypothese. Logo A não póde ser igual a B.

Si A < B, o lado a, opposto ao menor angulo, seria o menor, o que tambem é contra a hypethese.

Logo A não póde ser menor do que B.

A não podendo ser nem igual nem menor do que B, só poderá ser maior.

Logo. A > B.

—

Theorema 13. — A bissectriz de um angulo é o logar geometrico dos pontos do plano que distam igualmente dos lados do angulo.

Seja o angulo B, a bissectriz BV, e um ponto K sobre a bissectriz.

As distancias do ponto K aos lados do angulo são dadas pelas perpendiculares traçadas de K sobre os lados B A e B C. Precisamos, pois, demonstrar que K T = K P.

Os triangulos rectangulos BKT e B K P têm a hypotenusa commum e os angulos agudos em B iguaes. Logo, elles são iguaes. KT é, pois, igual a KP.

O ponto K, sendo tomado fóra da bisssectriz, não-dista igualmente dos lados do angulo.

K P corta a bissectriz em S, e S dista igualmente dos lados do angulo.

ST = SP

Unindo K T, notamos que K V, perpendicular, é menor do que K T, obliqua.

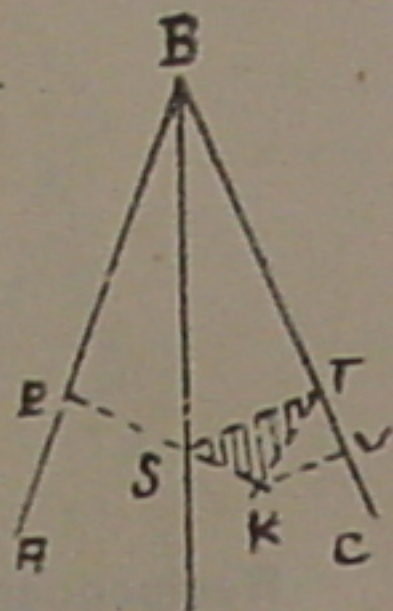
KV < KT

mas KT < KS + ST

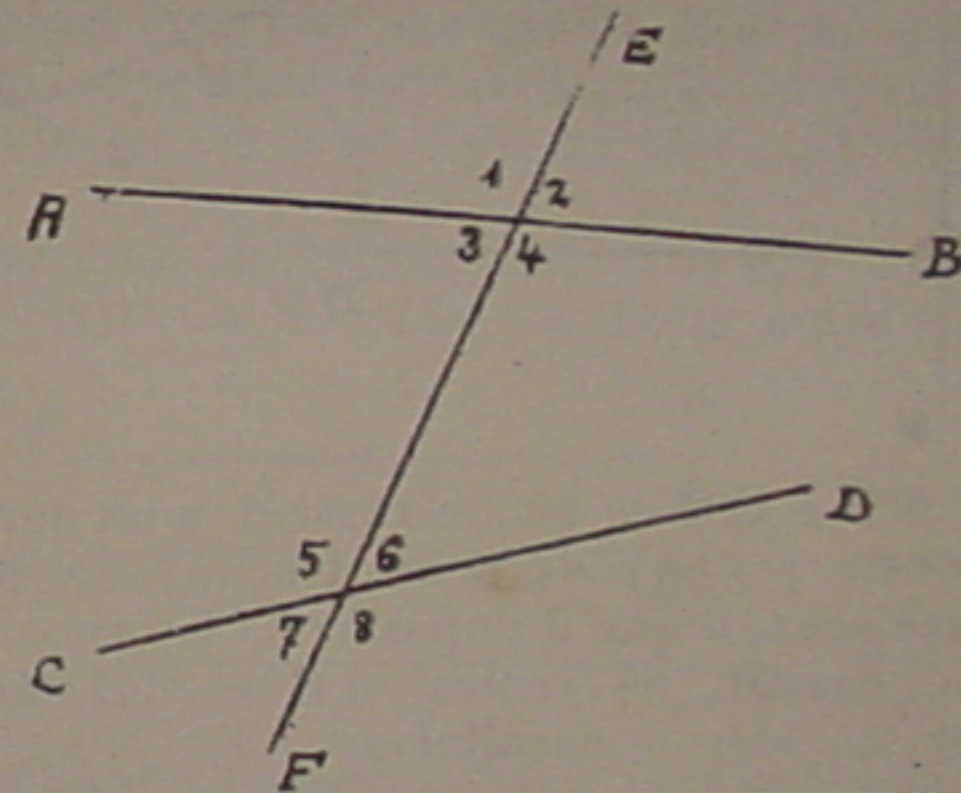
ou KT < KS + SP

KT < KP

ou, a fortiori

KV < KP.

Parallelas

Chamamos SECANTE toda recta que corta uma figura.

Sejam duas rectas quaesquer A B e C D, cortadas pela secante E F.

Formamos oito angulos.

3 e 6 }
4 e 5 } são alternos internos.

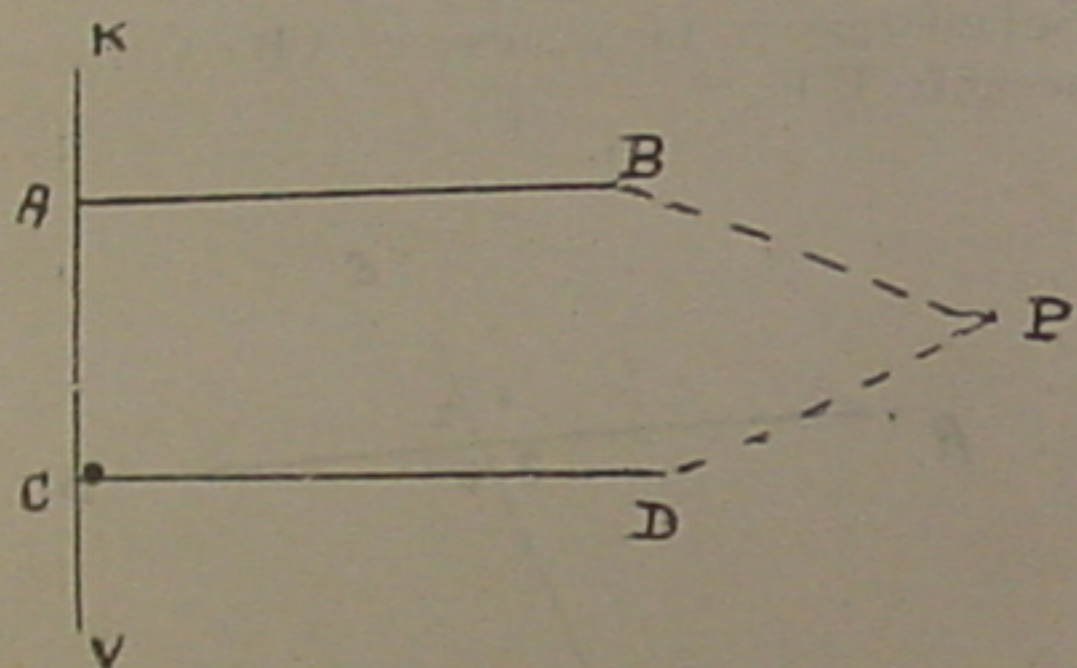
1 e 8 }
2 e 7 } são alternos-externos.

1 e 5 }
3 e 7 }
2 e 6 } são correspondentes.
4 e 8 }

3 e 5 } são internos do mesmo lado da secante.
4 e 6 }
1 e 7 } são externos do mesmo lado do secante.
2 e 8 }

—

Theorema 14. — Duas rectas perpendiculares a uma mesma terceira, são parallelas.

Sejam as rectas A B e C D, perpendiculares a K V.

Se A B e C D se encontrassem num ponto qualquer P, deste ponto poderiamos traçar sobre K V duas perpendiculares, o que é impossivel. Logo, o ponto P não póde existir, as rectas A B e C D não pódem encontrar-se; são — parallelas.

—

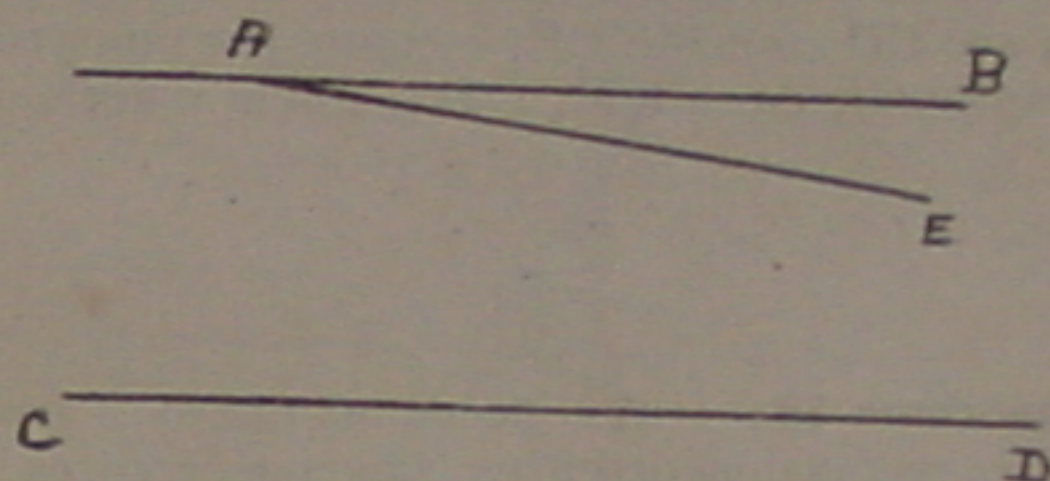
Postulatum d'Euclydes — (Euclydes, geometra grego, ensinava em Alexandria, sob o reinado de Ptolomeo I [306-283—a. J. Ch.] deixou-nos os ELEMENTOS que constituem, por assim dizer, a base da geometria plana.)

Euclydes pede que se admitta como evidente, que, por um ponto, se póde traçar uma parallela a uma recta, e uma só.

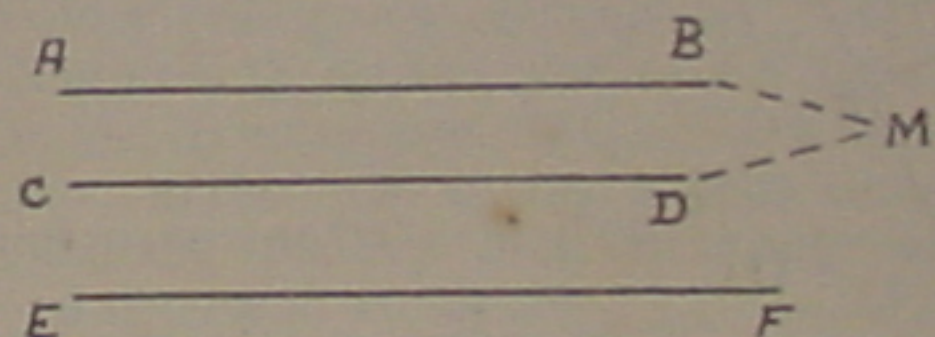
—

Theorema 15. — Se duas rectas A B e C D são

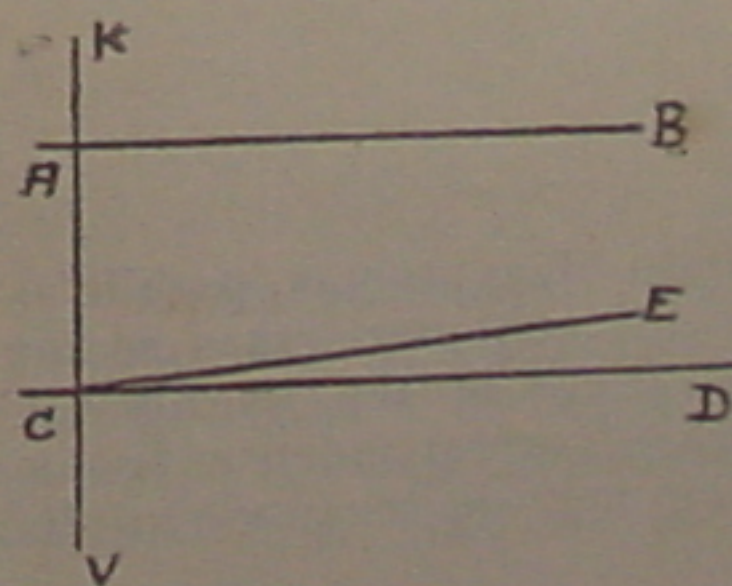
parallelas, toda recta A E que corte uma dellas, tambem cortará a outra.

Seja A B e C D duas parallelas, e suppomos A E cortando A B, digo que tambem cortará C D.

Porque, se não cortasse C D seria parallela a C D, logo, coincidiria com A B e não cortaria tambem A B. Logo, ou corta as duas ou não corta nenhuma.

—

Theorema 16. — Duas rectas A B e C D parallelas a uma terceira E F, são parallelas entre si.

Porque, se as rectas A B e C D se encontrassem em um ponto M, poder-se-hia por este ponto traçar duas parallelas a E F.

—

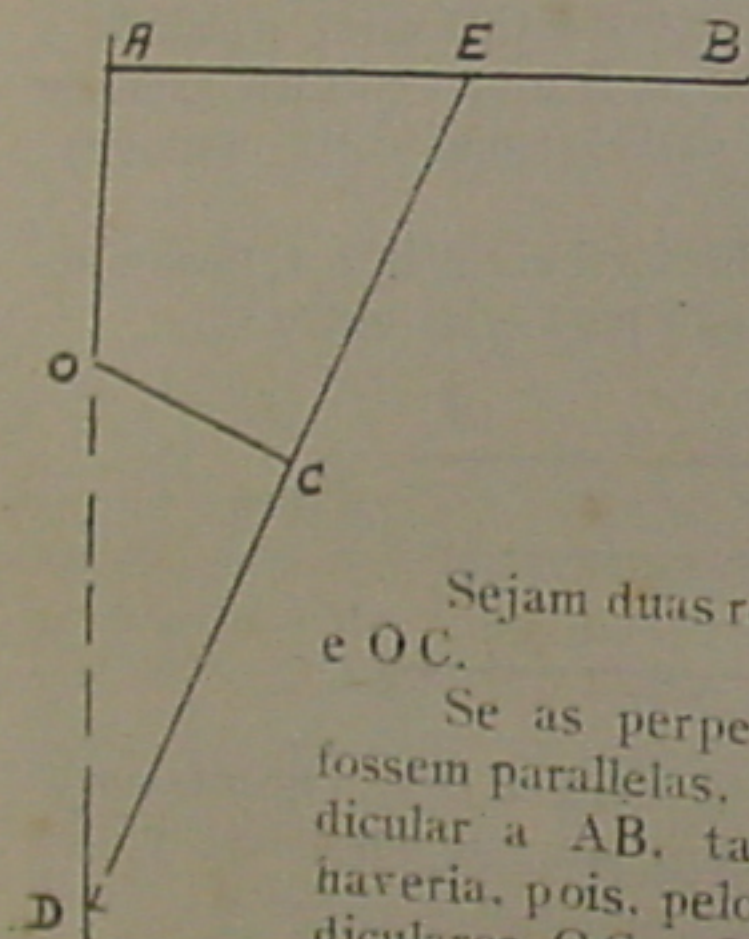
Theorema 17. — Se duas rectas são parallelas, toda recta perpendicular a uma, tambem é perpendicular á outra.

Sejam duas rectas A B e C D parallelas, e K V perpendicular a A B. — Vamos demonstrar que K V tambem é perpendicular a C D.

Supponhamos que

CD não fosse perpendicular a KV, e que a perpendicular fosse CE.

AB e CE sendo todas as duas perpendiculares a uma mesma terceira KV, são parallelas — Ora, por hypothese, AB e CD são parallelas — Como pelo ponto C só se póde traçar uma parallela a AB, concluimos que CD coincide CE, e como, por construcção, CE é perpendicular a KV, CD tambem o será.

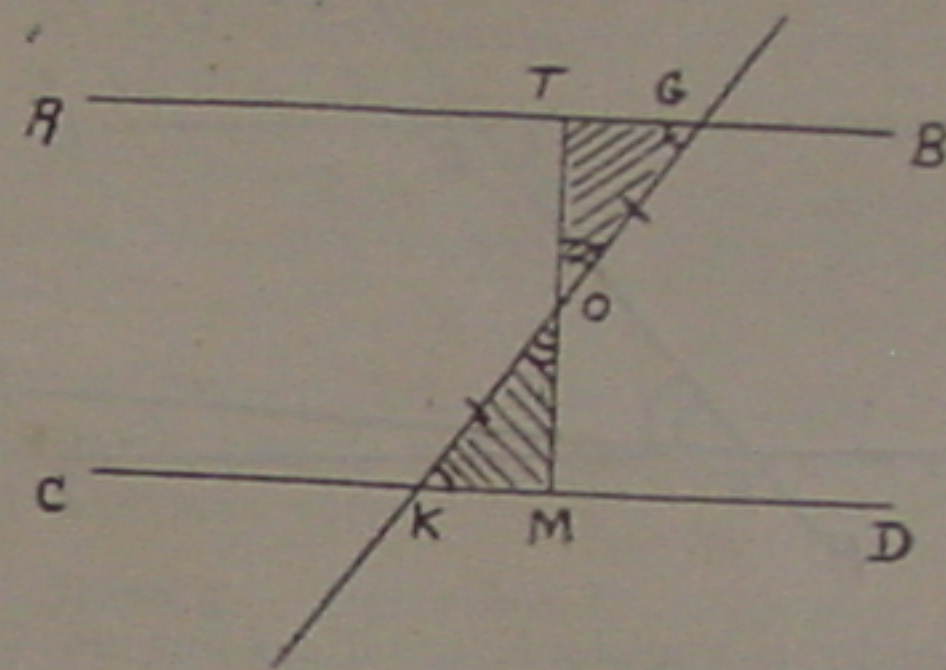
—

Theorema 18. — As perpendiculares, traçadas sobre duas rectas concorrentes, são concorrentes.

Sejam duas rectas concorrentes OA e OC.

Se as perpendiculares AB e CE fossem parallelas, a recta AOD perpendicular a AB, tambem o seria a DCE: haveria, pois, pelo ponto O, duas perpendiculares, OC e OD, a uma mesma recta CE, o que é impossivel.

—

Theorema 19. — Quando duas rectas parallelas são cortadas por uma secante qualquer, essas rectas formam angulos alternos-internos iguaes, angulos alternos-externos iguaes, angulos correspondentes iguaes, angulos internos do mesmo lado da secante supple-

mentares, e angulos externos do mesmo lado da secante supplementares.

Sejam as parallelas AB e CD cortadas pela secante GK.

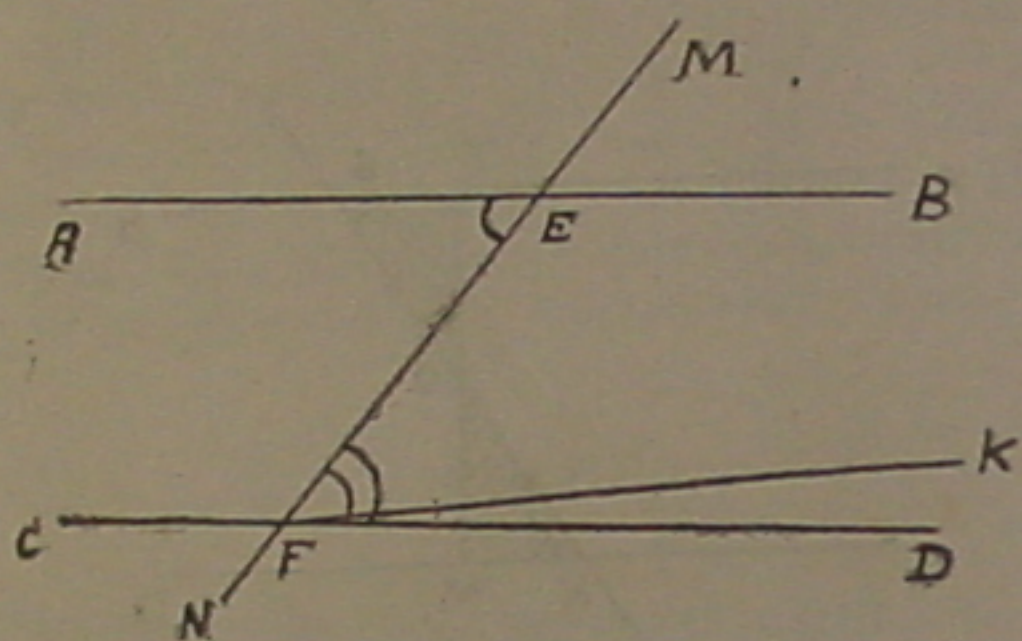
Tomemos o meio O de GK, e tracemos TM, perpendicular commum a AB e a CD.

Os dois triangulos rectangulos TOG e KOM têm os angulos O iguaes, por serem oppostos pelo vertice, e as hypotenusas OG e OK iguaes, por construcção; então, são iguaes, e seus elementos são respectivamente iguaes: logo os angulos em K e em G, alternos-internos, são iguaes.

D'ahi deduz-se facilmente que os angulos alternos-externos são iguaes, que os angulos correspondentes são iguaes, que os angulos internos do mesmo lado da secante são supplementares e que os angulos externos do mesmo lado da secante são supplementares.

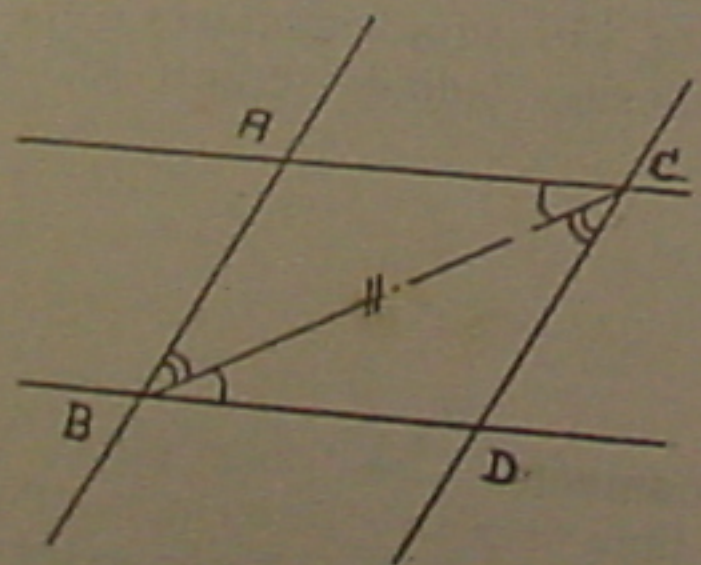
—

Reciprocamente. — Se, duas rectas AB e CD, cortadas por uma secante, formam angulos alternos-internos iguaes, ou angulos alterno-externos iguaes, ou angulos correspondentes iguaes, ou angulos internos do mesmo lado da secante supplementares, ou

angulos externos do mesmo lado da secante supplementares, ellas são parallelas.

Suppondo o angulo E igual ao angulo F, e CD não parallela a AB, traçemos, pelo ponto F, a recta FK parallela a AB.

As duas rectas parallelas AB e FK formam angulos alternos-internos iguaes; é preciso, pois, que os angulos formados por FE com FK e com FD sejam iguaes: logo, FD coincide com FK, e é parallela a AB.

A demonstração relativa aos angulos alternos-externos, correspondentes, internos do mesmo lado da secante, externos do mesmo lado da secante, é analoga á que acabamos de dar.

Theorema 20 — Duas rectas parallelas comprehendidas entre parallelas são iguaes.

Sejam as parallelas AC e BD cortadas pelas duas outras parallelas AB e CD; vou demonstrar que as

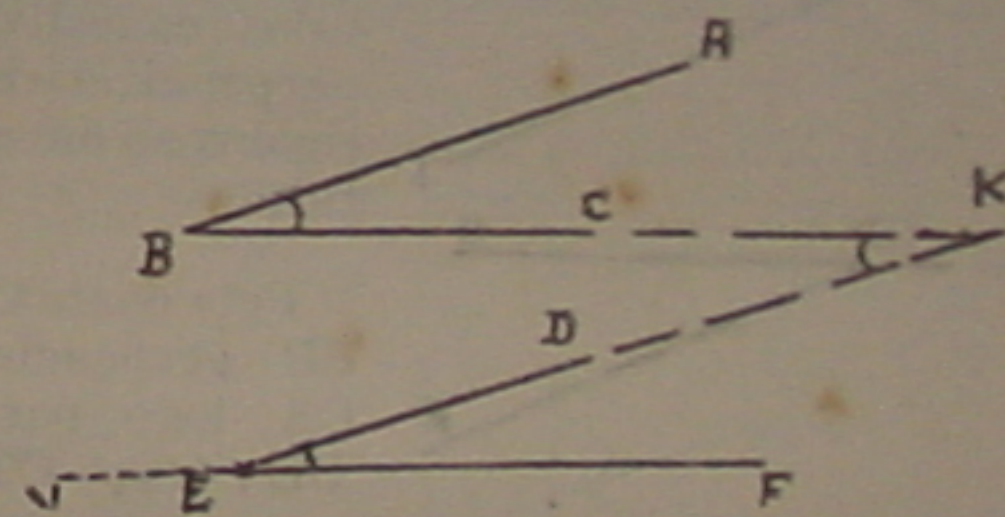
porções AC e BD determinadas sobre as duas primeiras pelas duas segundas, são iguaes.

Traço a diagonal BC. Os triangulos ABC e BCD são iguaes, logo seus elementos são respectivamente iguaes, e AC igual BD.

D'ahi deduz-se que duas rectas parallelas equidistam em toda sua extensão, logo, nunca se encontram.

Problema — Determinar o logar geometrico dos pontos do plano, que distam de uma recta dada, de uma distancia dada.

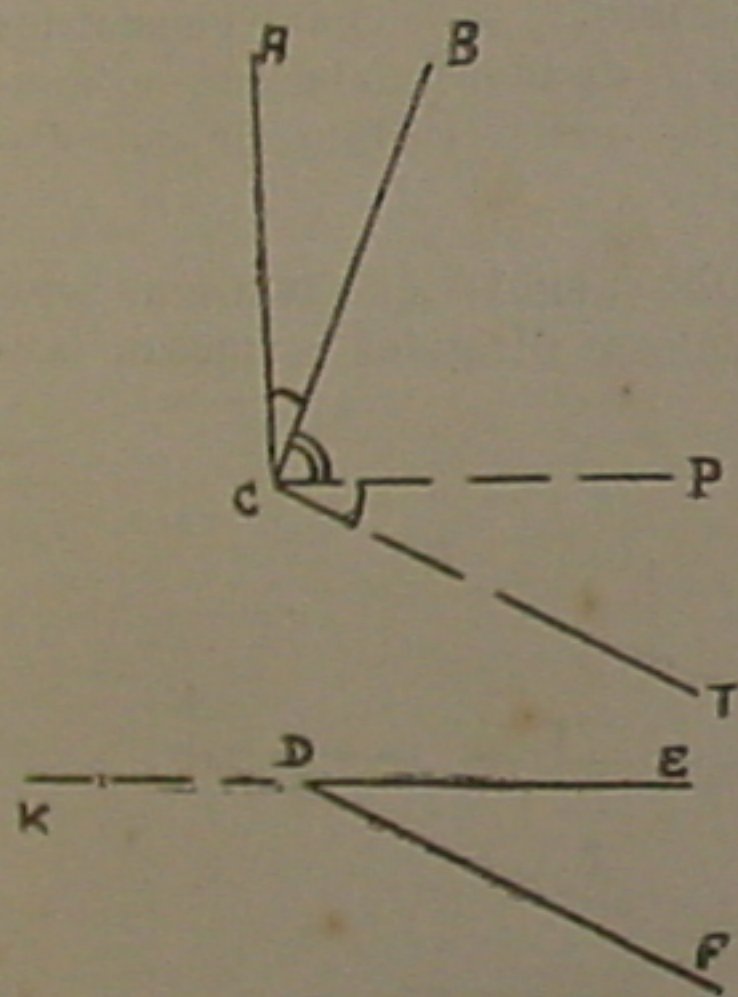
Problema — Determinar o logar geometrico dos pontos do plano, que distam igualmente ao mesmo tempo de duas rectas que se cortam, de uma distancia dada.

Theorema 21 — Dois angulos que têm seus lados respectivamente parallelos e dirigidos no mesmo sentido são iguaes.

Sejam os angulos ABC e DEF, com os lados respectivamente parallelos e dirgidos no mesmo sentido.

Prolonguemos BC e ED até o seu encontro em K.

Os angulos B e K são iguaes como alternos-internos formados pelas parallelas AB e EK cortadas pela secante BK: d'um modo analogo os angulos E e K tambem são iguaes; logo, o angulo B é igual ao angulo E.

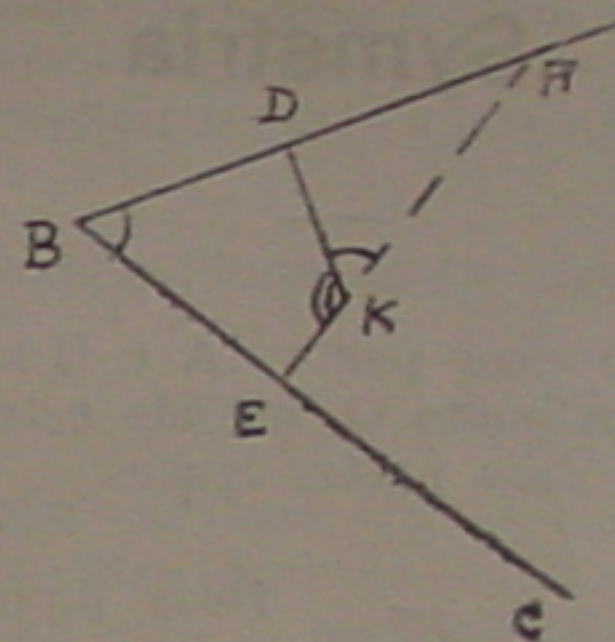
Considerando os angulos ABC e DEV, com os lados respectivamente parallelos, porém dirigidos em sentido contrario, notamos que VED é o supplemento de DEF, logo tambem é supplemento de ABC. Os angulos ABC e DEV, que têm seus lados respectivamente parallelos e dirigidos em sentido contrario, são, pois, supplementares.

Theorema 22 — Se dois angulos têm seus lados respectivamente perpendiculares e dirigidos no mesmo sentido, elles são iguaes — se os lados respectivamente perpendiculares são dirigidos em sentido contrario, elles são supplementares.

Sejam os angulos ACB e EDF com os lados respectivamente perpendiculares e dirigidos no mesmo sentido.

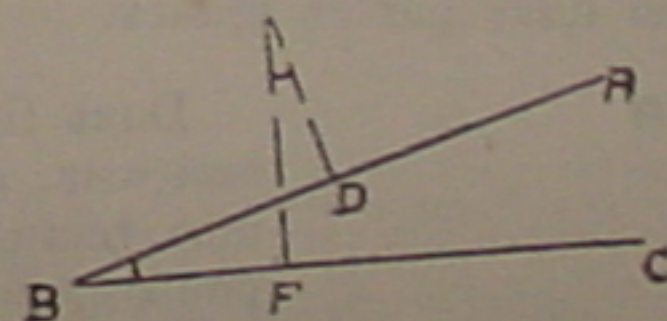
Pelo ponto C, traço CP perpendicular a CA, logo, parallela a DE; traço CT, perpendicular a BC, logo, parallela a DF. Os angulos PCT e EDF são iguaes, pelo theorema precedente. Notando que ACB e PCT têm o mesmo complemento BCP, concluimos que ACB e EDF são iguaes.

ACB e KDF, que têm os lados respectivamente perpendiculares e dirigidos em sentido contrario, são supplementares. Pois, KDF, supplemento de EDF, tambem o será de seu igual ACB.

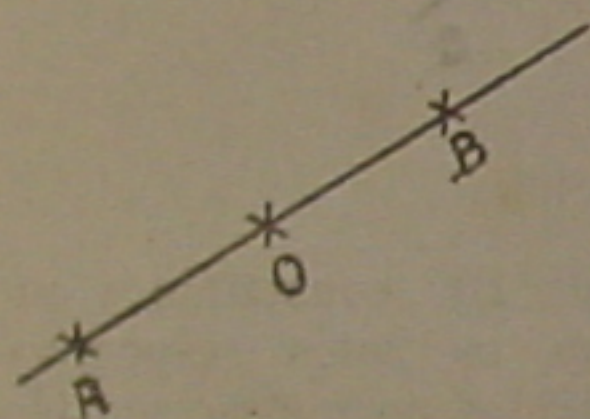
Theorema 23—D'um ponto K, tomado entre os

lados d'um angulo, traçando perpendiculares sobre os lados d'este angulo, formamos um angulo DKE supplemento do angulo dado ABC.

Com effeito, prolongando EK, constatamos que os angulos DKA e ABC têm os lados respectivamente perpendiculares e dirigidos no mesmo sentido, logo são iguaes.

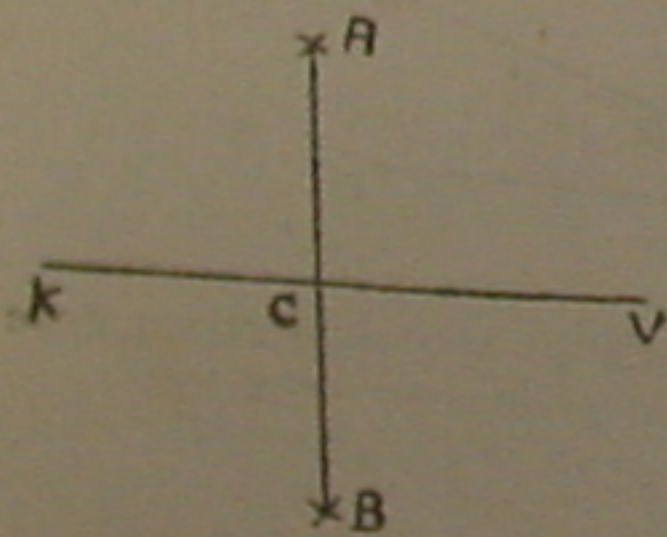
Então, DKE supplemento de DKA, tambem o será de ABC.

Se tivessemos tomado o ponto K fóra do angulo ABC, teriamos obtido dois angulos, FKD e ABC, iguaes, pois, os seus lados são respectivamente perpendiculares e dirigidos no mesmo sentido.

Symetria

—

Diz-se que dois pontos A e B são symetricos em relação a um ponto O, quando este ponto divide a recta AB em duas partes iguaes.

Duas figuras são symetricas em relação a um ponto, quando seus pontos são dois a dois symetricos em relação a esse ponto, que se domina CENTRO DE SYMETRIA.

O ponto de encontro das diagonaes de um parallelogrammo é um centro de symetria.

Diz-se que dois pontos A e B são symetricos em relação a uma recta KV, quando AB é perpendicular sobre KV e é dividida no ponto C, onde encontra KV, em duas partes iguaes.

Duas figuras são symetricas, em relação a uma recta, quando seus pontos são dois a dois symetricos em relação a esta recta, que se denomina EIXO DE SYMETRIA.

—

Theorema 24—Duas figuras symetricas são iguaes.

Em relação a um centro da symetria, basta fazer girar uma dellas, no plano, de um angulo de 180°, e ella virá coincidir com a outra.

Em relação a um eixo de symetria, basta fazer girar uma delles, em torno do eixo, de um angulo de 180°.

Quando uma figura plana tem dois eixos de symetria perpendiculares um ao outro, o ponto de intersecção d'este dois eixos é o centro de symetria da figura.

Como exemplo, temos o losango.

—

Translação—de uma figura n'um plano, é sua passagem para outro logar do plano, porém, todos os seus pontos movendo-se parallelamente a uma direcção determinada e os percursos de todos os pontos sobre suas respectivas parallelas sendo iguaes.

Em outros termos, diz-se que uma figura plana de forma invariavel é animada d'um movimento de translação no seu plano, quando se desloca neste plano, de tal modo que cada um de seus lados fique constantemente parallelo á sua posição primitiva. Nesse movimento, os pontos da figura considerada descrevem rectas iguaes e parallelas.

—

Polygonos

Polygonos EQUILATEROS são os que têm os lados iguaes,

Polygonos EQUIANGULOS são os que têm os angulos iguaes.

Dois polygonos são equilateros entre si, quando têm os lados respectivamente iguaes, e collocados na mesma ordem, isto é, seguindo os seus contornos, no mesmo sentido, o primeiro lado de um é igual ao primeiro lado do outro, o segundo lado de um é igual ao segundo lado do outro, e assim por diante.

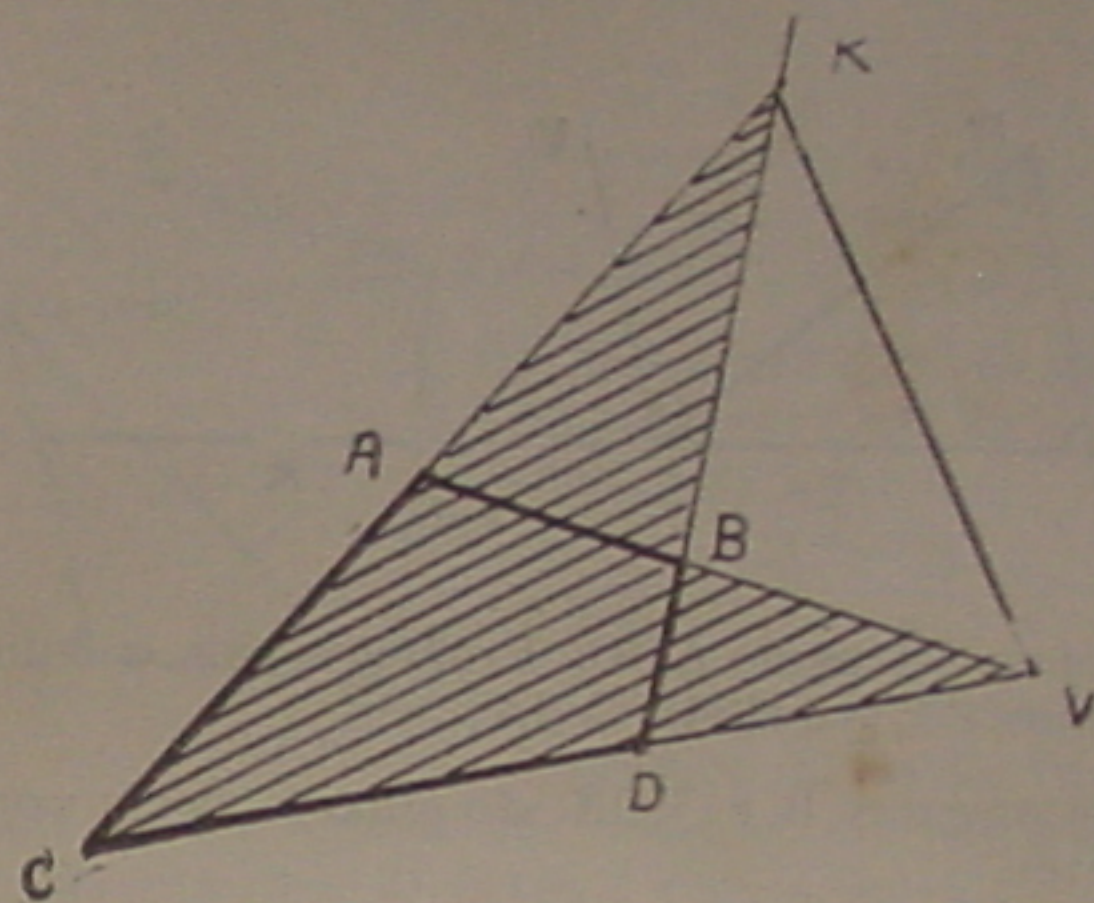
D'um modo analogo, dois polygonos são equiangulos entre si, quando os seus angulos são respectivamente iguaes.

Polygonos REGULARES são os que têm os lados iguaes e os angulos iguaes.

Chama-se DIAGONAL toda recta que une os vertices de dois angulos não adjacentes.

Chama-se QUADRILATERO COMPLETO a figura que se obtem depois de prolongar os lados oppostos de um quadrilatero : unindo os pontos de encontro dos lados oppostos prolongados obtem-se a TERCEIRA DIAGONAL.

Seja ABDC um quadrilatero : prolongo os lados oppostos até que se encontrem em K e em V. KV

é a terceira diagonal, e a figura KACDVBK é um quadrilatero completo.

Perimetro — de um polygono, é a somma de seus lados

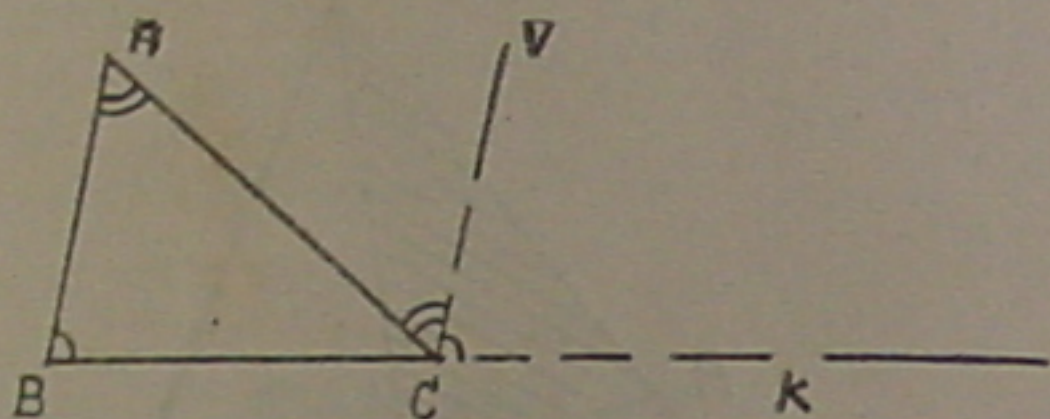
Podemos classificar os polygonos relativamente ao numero de seus lados,

O mais simples é o triangulo, que tem tres lados, como já vimos.

Depois vem o quadrilatero, com quatro lados ;

o pentagono, com cinco,
o hexagono, com seis,
o heptagono, com sete,
o octagono, com oito,
o enneagono, com nove,
o decagono, com dez,
o hendecagono, com onze,
o dodecagono, com doze,
o pentadecagono, com quinze,
o icosagono, com vinte.

Os polygonos de 13, 14,...17,...23,... lados não têm nomes particulares ; diz-se um polygono de treze lados, um polygono de cincoenta e sete lados, etc.

Theorema 25—A somma dos angulos de um triangulo vale sempre dois rectos. (Lei angular de THALES).

Seja o triangulo ABC. Prolonguemos o lado BC e tracemos CV parallela a BA.

Os angulos B e VCK são iguaes, como correspondentes.

Os angulos A e ACV são iguaes, como alternos-internos. A somma dos angulos em C do mesmo lado de BK, perfazendo dois rectos, e esses angulo sendo respectivamente iguaes aos angulos do triangulo, concluimos que a somma dos angulos do triangulo tambem vale dois rectos.

Cada angulo de um triangulo é o supplemento da somma dos dois outros.

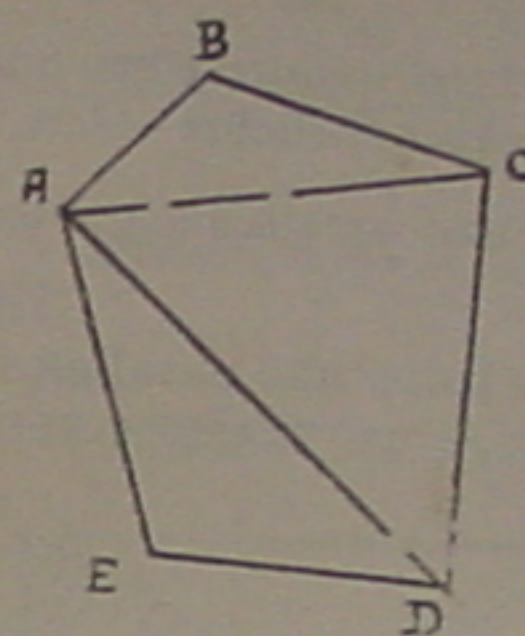
Si dois triangulos têm dois angulos respectivamente iguaes, o terceiro angulo do primeiro triangulo será igual ao terceiro angulo do segundo triangulo.

O angulo exterior ACK é igual á somma dos angulos interiores não adjacentes do triangulo

Um triangulo qualquer tem sempre pelo menos dois angulos agudos.

Os dois angulos agudos d'um triangulo rectangulo são complementares.

Cada angulo de um triangulo equilatero vale os dois terços de um angulo recto — (60 grãos).

Theorema 26—A somma dos angulos de um polygono qualquer, vale tantas vezes dois angulos rectos quantos são os lados menos dois.

Um polygono tendo n lados, podemos traçar por cada vertice n — 3 diagonaes, e podemos decompol-o em n—2 triangulos.

O numero total de diagonaes de um polygono de n lados é dado pela formula:

$$\frac{(n-3)\ n}{2}$$

A somma de todos os angulos componentes dos triangulos, sendo igual á somma dos angulos do polygono, essa somma será (n — 2) vezes 2 rectos, ou 2 n — 4.

Chama-se ANGULO EXTERIOR de um polygono, o angulo formado por um lado e o prolongamento do lado adjacente.

Em cada vertice de um polygono, a somma do angulo interior e do angulo exterior perfaz 2 rectos. Se o polygono tem n lados, tambem terá n vertices, e a somma de todos os seus angulos interiores e exteriores será

$$2\ n$$

Se desta somma, subtrahimos a somma dos angulos interiores, que é 2 n — 4, achamos

$$2\ n - (2\ n - 4) = 2\ n - 2\ n + 4 = 4$$

Logo, a somma dos angulos exteriores de um polygono vale sempre 4 rectos.

Quadrilateros.— Entre os quadrilateros, os mais interessantes são:

o PARALLELOGRAMMO, que tem os lados oppostos parallelos.

o RECTANGULO, que é um parallelogrammo com seus angulos rectos.

o LOSANGO, que é um parallelogramo com os quatro lados iguaes.

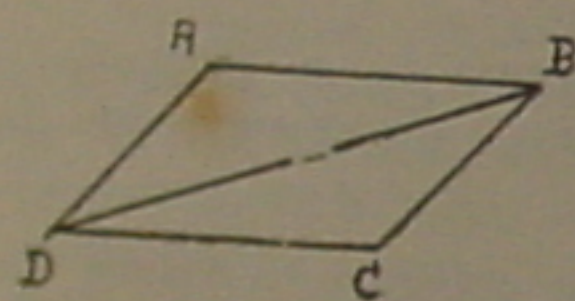
o QUADRADO, que tem os quatro lados iguaes e os quatro angulos rectos.

Ainda podemos citar o TRAPEZIO, quadrilatero que tem dois lados parallelos e dois não parallelos

O trapezio que tem os lados não parallelos iguaes, é um TRAPEZIO ISOCELES.

O trapezio que tem um dos lados não parallelos, perpendicular aos lados parallelos, é um TRAPEZIO RECTANGULO.

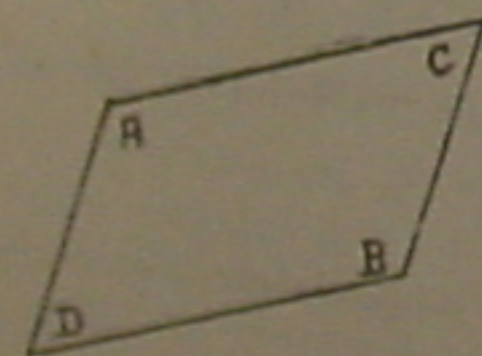
—

Theorema 27—Os lados oppostos de um parallelogrammo são iguaes, bem como os angulos oppostos.

Basta para isso traçar a diagonal DB. A igualdade dos triangulos ABD e BDC resolve a questão.

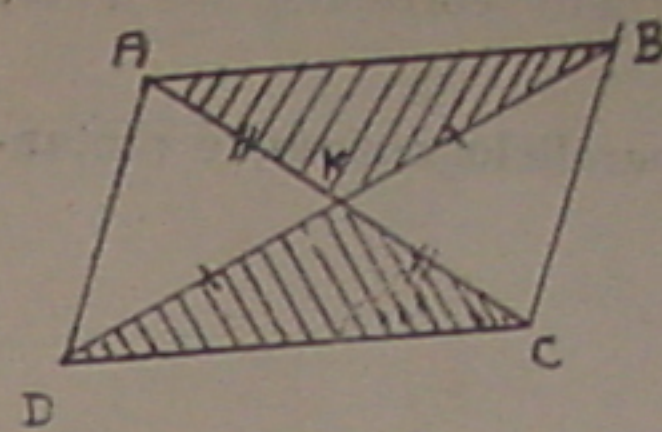
—

Theorema 28 — Todo quadrilatero que tem seus lados oppostos iguaes, é um parallelogrammo.

—

Theorema 29 — Todo quadrilatero, que tem seus angulos oppostos iguaes, é um parallelogrammo.

$A = B$
$C = D$
$A + B + C + D = 4$ rectos
$2A + 2D = 4$ rectos
$A + D = 2$ rectos

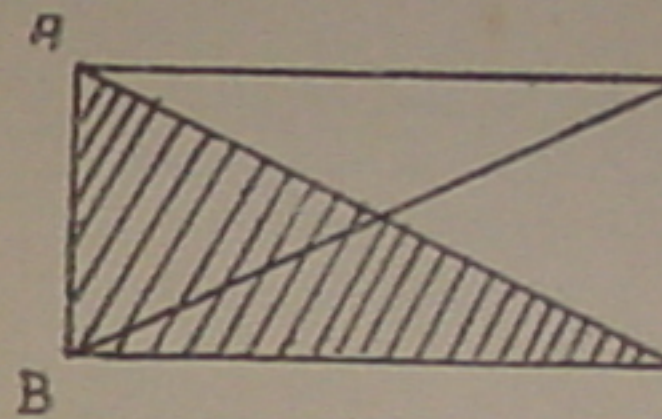
Ora, os angulos A e D são internos do mesmo lado da secante: logo os lados AC e DB são parallelos, e a figura é um parallelogrammo.

—

Theorema 30—Todo quadrilatero que tem dois lados oppostos iguaes e parallelos é um parallelogrammo.

—

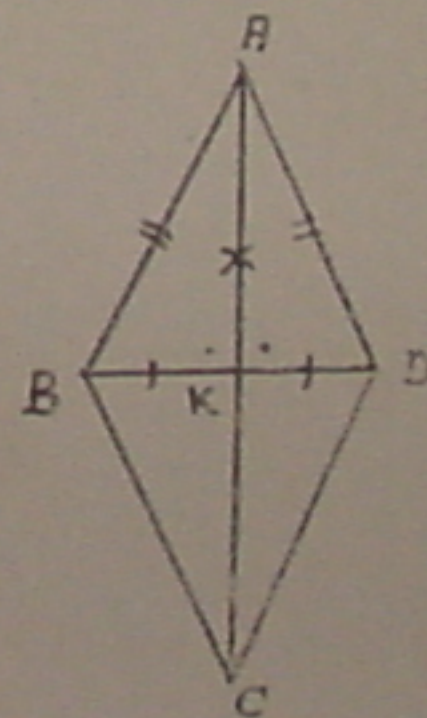
Theorema 31 — As diagonaes de um parallelogrammo se cortam ao meio.

Deduz-se da igualdade dos triangnlos AKB e DKC.

—

Theorema 32— As diagonaes do rectangulo são iguaes.

Deduz-se da igualdade dos triangulos rectangulos, CAB e BDC.

—

Theorema 33—As diagonaes dolosango são orthogonaes.

Deduz-se da igualdadade dos triangulos BAK e DAK.

—

As diagonaes do quadrado cortam-se ao meio, são iguaes e são orthogonaes.

Porque o quadrado é parallelogrammo, é rectangulo e é losango

———

2ª PARTE